



معاونت

این قسمت محل سرنویس است و نباید در آن چیزی نوشته شود

رشته ..... ۲۵ امتیاز

یک رشته  $n$  رقمی از حروف  $A, B, C$  داریم. در هر مرحله می‌توانیم دو حرف متوالی و متفاوت از رشته در نظر بگیریم و آن‌ها را با حرف سوم جایگزین کنیم. منظور از حرف سوم، حرفی از مجموعه  $\{A, B, C\}$  است که در میان دو حرف گفته شده نیامده است. برای مثال می‌توانیم با تغییر حروف چهارم و پنجم (از سمت چپ) رشته  $ABCBA$  آن را به  $ABCCCA$  تبدیل کنیم. فرض کنید تعداد حروف  $A, B, C$  در رشته‌ی گفته شده به ترتیب  $a, b, c$  باشد. باقی‌مانده‌ی  $a, b, c$  در تقسیم بر ۳ را به ترتیب  $r_a, r_b, r_c$  در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر دست کم دو تا از سه عدد  $r_a, r_b, r_c$  برابر باشند، می‌توانیم با تعدادی مرحله تمام حروف رشته را برابر کنیم.



پیاده‌سازی توابع ..... ۲۵ امتیاز

یک زبان برنامه‌نویسی جدید داریم که در آن به پیاده‌سازی توابع می‌پردازیم. پیش از صحبت در مورد این زبان برنامه‌نویسی، مجموعه‌ای اعداد سرخ را تعریف می‌کنیم که برابر  $\{0, 1, 2\}$  است. در این زبان برنامه‌نویسی فقط از اعداد سرخ استفاده می‌شود. به عبارت دیگر مقدار هر متغیر، هر عدد، هر ورودی، هر خروجی و ... فقط می‌تواند عدد سرخ باشد.

تنها تابع آماده‌ی این زبان، تابع `branko` است. این تابع دو عدد سرخ از ورودی می‌گیرد و یک عدد سرخ در خروجی برمی‌گرداند. این تابع را با  $b(x, y)$  نشان می‌دهیم. خروجی این تابع به شکل زیر محاسبه می‌شود:

۱. ابتدا عدد کم‌تر در میان  $x$  و  $y$  انتخاب می‌شود.

۲. عدد انتخاب شده با یک جمع می‌شود.

۳. حاصل تابع، باقی‌مانده‌ی عدد محاسبه شده در تقسیم بر ۳ است.

برای درک بهتر در جدول زیر خروجی تابع را به ازای ورودی‌های مختلف نوشته‌ایم:

$x$	$y$	$b(x, y)$
۰	۰	۱
۰	۱	۱
۰	۲	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۲
۱	۲	۲
۲	۰	۱
۲	۱	۲
۲	۲	۰

هر برنامه در این زبان در قالب زیر نوشته می‌شود:

۱. در خط یکم برنامه، نام ورودی‌ها نوشته می‌شود. برای مثال، خط یکم یک برنامه با چهار ورودی می‌تواند به شکل زیر باشد:

`x y inp z2`

۲. در خط دوم برنامه، نام خروجی نوشته می‌شود. در این زبان هر برنامه فقط یک خروجی دارد. برای مثال، خط دوم یک برنامه می‌تواند به شکل زیر باشد:

`ans5`

۳. در خط سوم برنامه، نام متغیرهای دیگری که در برنامه استفاده خواهد شد، نوشته می‌شود. برای مثال، خط سوم یک برنامه می‌تواند به شکل زیر باشد:

`tmp1 tmp2 t4 a b`



۴. از خط چهارم به بعد برنامه، قالب کلی هر خط به شکل زیر است:

$$v \leftarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

که در آن  $v$  یک متغیر ورودی، متغیر خروجی یا از متغیرهای دیگر است. همچنین  $f$  یک تابع از پیش تعریف شده با  $n$  ورودی است. هر کدام از  $a_i$  ها نیز باید یک عدد سرخ یا یک متغیر مقداردار باشند. برای مثال یک نمونه در زیر آمده است (فرض کنید  $g$  یک تابع از پیش تعریف شده،  $x$  یک متغیر ورودی و  $r$  یک متغیر مقداردار است):

$$tmp1 \leftarrow g(2, x, r, x)$$

برای آشنایی بیشتر شما با این زبان یک مثال می‌زنیم. فرض کنید می‌خواهیم تابع  $\min(x, y)$  را پیاده‌سازی کنیم که با گرفتن دو عدد سرخ از ورودی، عدد کم‌تر را در خروجی برمی‌گرداند. شکل دقیق عمل کرد این تابع در جدول زیر آمده است:

$x$	$y$	$\min(x, y)$
۰	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۲	۰
۱	۰	۰
۱	۱	۱
۱	۲	۱
۲	۰	۰
۲	۱	۱
۲	۲	۲

توجه کنید قبل از نوشتن این برنامه، هیچ تابع دیگری تعریف نشده و تنها می‌توانیم از تابع  $branko$  استفاده کنیم. پس از پیاده‌سازی تابع  $\min$  می‌توانیم در برنامه‌های بعدی از آن استفاده کنیم. روش زیر، یک پیاده‌سازی برای تابع  $\min$  است:

```
x y
z
t
t <- b(x, y)
t <- b(t, t)
z <- b(t, t)
```



حال در هر یک از قسمت‌های زیر، باید به پیاده‌سازی تابع گفته شده بپردازید. می‌توانید قبل از پیاده‌سازی توابع گفته شده، تابعی دیگر را به ترتیبی مشخص در برنامه‌هایی جداگانه پیاده‌سازی کنید و از آن‌ها در برنامه‌های بعدی کمک بگیرید. برای هر تابعی که پیاده‌سازی می‌کنید، توضیح مختصری نیز ارائه دهید. توضیح تنها یا پیاده‌سازی تنها نمره‌ای نخواهد داشت و هر دو باید با هم انجام شود.

(آ) تابع  $max$  را پیاده‌سازی کنید. این تابع دو ورودی می‌گیرد و عدد بیش‌تر را برمی‌گرداند. (۱۰ نمره)  
(ب) دو تابع  $d1$  و  $d3$  را پیاده‌سازی کنید که هر کدام دو ورودی می‌گیرند و باید به شکل زیر کار کنند:

$x$	$y$	$d1(x, y)$	$d3(x, y)$
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱
۰	۲	۰	۲
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۰	۲
۱	۲	۱	۰
۲	۰	۰	۲
۲	۱	۱	۰
۲	۲	۱	۱

در حقیقت با کنار هم گذاشتن حاصل‌های  $d1(x, y)$  و  $d3(x, y)$  برای یک  $x$  و  $y$  مشخص، حاصل جمع دو رقمی  $x$  و  $y$  در مبنای سه به دست می‌آید. (۱۵ نمره)



معاونت

این قسمت محل سرنویس است و نباید در آن چیزی نوشته شود

صفحه ..... ۲۵ امتیاز

روی یک صفحه  $n$  خط راست کشیده‌ایم، طوری که هیچ دو خطی موازی و هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط، صفحه را به تعدادی ناحیه افراز کرده‌اند. ثابت کنید می‌توانیم در هر یک از ناحیه‌ها یک عدد صحیح بنویسیم، طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- اعداد نوشته شده دو به دو متمایز باشند.
- جمع چهار عدد ناحیه‌های مجاور هر نقطه‌ی ناشی از برخورد خطوط برابر باشد.



معاونت

این قسمت محل سرنویس است و نباید در آن چیزی نوشته شود

دوره‌های مرتبط ..... ۲۵ امتیاز  
فرض کنید  $n$  یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۵ است. یک گراف ساده‌ی  $n$  رأسی داریم که هر دو دور آن، دست کم یک رأس مشترک دارند. بیشینه‌ی تعداد یال‌های این گراف را بر حسب  $n$  بیابید.