

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری سوم

یکشنبه ۲۹ مرداد ۱۴۰۲

وقت: ۵ ساعت

مسئله‌ی یکم: بسکتبالیست امتیاز ۱۰۰

بازیکن بسکتبالی را در نظر بگیرید که در حال پرتاب ضربه‌ی آزاد است. می‌دانیم پرتاب اول او موفق و پرتاب دوم او ناموفق بوده است. بعد از آن، او به طور متوالی به پرتاب‌هایش ادامه می‌دهد. می‌دانیم احتمال موفقیت او در پرتاب $n+1$ برابر با k/n است که k تعداد پرتاب‌های موفق او در n پرتاب اول است. برای مثال احتمال موفقیت او در پرتاب سوم $1/2$ است. اگر این پرتاب موفق شود، احتمال موفقیت پرتاب چهارم $2/3$ و اگر پرتاب سوم موفق نباشد، احتمال موفقیت پرتاب چهارم $1/3$ خواهد بود. حال فرض کنید این بازیکن ۲۰۰ پرتاب انجام می‌دهد (شامل دو پرتاب اول) و ما از نتیجه‌ی پرتاب سوم تا ۱۹۹ م بی‌خبریم و تنها می‌دانیم که پرتاب ۲۰۰ م موفق بوده است. احتمال موفقیت پرتاب ۲۰۱ م با توجه به این اطلاعات چقدر است؟ استدلال و مراحل رسیدن به پاسخ نهایی‌تان را به طور کامل شرح دهید. توجه کنید که جواب نهایی شما باید یک عدد صریح باشد و جوابی که در آن سیگما یا هر فرمول دیگری دارد قابل قبول نیست.

مسئله‌ی دوم: درخت و دستگاه امتیاز ۱۰۰

مریم یک درخت n راسی لیل دار دارد و می‌خواهد درخت خود را به ایلچ بفهماند. ایلچ از مجموعه راس‌های درخت مریم آگاه است، اما از یال‌های آن بی‌اطلاع است. ایلچ که زبان مریم را نمی‌فهمد، از او می‌خواهد از طریق یک دستگاه قدیمی این کار را انجام دهد. این دستگاه قدیمی گراف مریم و دو راس دلخواه u و v را می‌گیرد و مشخص می‌کند کدام راس‌های درخت می‌توانند بدون نیاز به عبور از u به v برسند و بالعکس. در واقع در خروجی این دستگاه، دو راس ورودی u و v و دو مجموعه A_u و A_v آمده است که A_v مجموعه‌ی راس‌هایی است که بدون نیاز به عبور از u به v می‌رسند و A_u مجموعه‌ی راس‌هایی که بدون نیاز به عبور از v به u می‌رسند. مریم می‌خواهد با توجه به گرافی که دارد، یک مجموعه‌ی $\{(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)\}$ از جفت راس‌های درختش انتخاب کند و به دستگاه بدهد و جواب دستگاه را برای هر جفت راس داده شده به همراه خود جفت راس به ایلچ بدهد به صورتی که ایلچ بتواند به کمک اطلاعات داده شده به صورت یکتا درخت مریم را پیدا کند. توجه کنید که ایلچ از عملکرد دستگاه و نحوه خروجی دادن آن آگاه است. سختی درخت مریم را اندازه‌ی کوچکترین مجموعه از جفت راس‌ها می‌گوییم که به کمک آن مریم بتواند درختش را به صورت یکتا به ایلچ بفهماند. (به عنوان مثال سختی یک مسیر ۴ راسی برابر ۱ است، زیرا کفایت مریم راس دوم و سوم مسیر را به دستگاه بدهد.) فرض کنید $f(n)$ برابر بیشینه‌ی سختی درخت‌های n راسی باشد. به عنوان مثال $f(4) = 2$. مقدار $f(n)$ را بر حسب n بیابید.

مسئله سوم: چاپگشت طلایی ۱۰۰ امتیاز

پیمان جایگشتی از اعداد ۱ تا n را به عنوان جایگشت طلایی تعیین کرده است. هدف ما یافتن این جایگشت است. برای این کار می‌توانیم در هر مرحله جایگشتی از اعداد ۱ تا n را به پیمان بدهیم و در جواب به ما تعداد اعدادی از این جایگشت که در جایگاه درست قرار دارند را اعلام می‌کند.

(آ) فرض کنید می‌دانیم در جایگشت طلایی حداقل یکی از اعداد ۱ تا k در یکی از جایگاه‌ها با شماره‌ی اعداد ۱ تا k قرار دارد. نشان دهید با $O(k)$ بار استفاده از دستگاه می‌توانیم عدد یکی از جایگاه‌های جایگشت طلایی را به درستی پیدا کنیم. (۴۰ نمره)

(ب) ثابت کنید همواره با $O(n\sqrt{n})$ بار استفاده از دستگاه می‌توان جایگشت طلایی را یافت. در صورت نیاز، برای حل این بخش می‌توانید از قسمت اول بدون اثبات استفاده کنید. (۶۰ نمره)

(اگر نشان دهید این کار با $O(n^2)$ بار استفاده از دستگاه قابل انجام است حداکثر ۵ نمره از این بخش دریافت می‌کنید)