باسمه‌تعالی

# دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

## آزمون نظری دوم

پنج‌شنبه ۲۶ مرداد ۱۴۰۲ وقت: ۵ ساعت

## مسأله‌ی یکم: میز رستوران ..... ۱۰۰ امتیاز

$n$ زوج داریم ($n > ۲$) که به مهمانی دعوت شده‌اند و قرار است که دور یک میز $۲n$ نفره دایره‌ای شکل با صندلی‌های (به ترتیب ساعتگرد) شماره ۱ تا $۲n$ بنشینند. برای نشستن یک شرط داریم که یک زن و یک مرد که زن و شوهر نیستند نمی‌توانند کنار هم بنشینند. افراد به ترتیبی وارد رستوران می‌شوند (ممکن است یک زن و شوهر با فاصله زمانی از هم وارد شوند) و هرکس در صندلی خالی با کوچکترین شماره که شرط را نقض نمی‌کند می‌نشیند. کوچکترین $k$ را بیابید که ترتیبی از آمدن افراد وجود داشته باشد که $k$امین نفری که وارد رستوران می‌شود جایی برای نشستن پیدا نکند.

در صورتی که کران بالا و پایینی که برای این سوال پیدا می‌کنید یک واحد اختلاف داشته باشند، حداکثر ۶۰ نمره از این سوال دریافت می‌کنید.

## مسأله‌ی دوم: ماینور کردن دور ..... ۱۰۰ امتیاز

یک دور $n$ راسی داریم که رئوس آن با مجموعه‌های تک عضوی $\{۱\}$ تا $\{n\}$ به ترتیب برچسب‌گذاری شده‌اند. می‌توان به تعداد دلخواه عملیات زیر را روی این گراف انجام داد:

دو راس که دقیقاً دو مسیر بین این دو راس وجود دارد را ماینور کنیم. ماینور کردن دو راس به این صورت است که این دو راس را حذف کرده و یک راس جدید با برچسب اجتماع مجموعه‌های این دو راس اضافه می‌کنیم. همچنین انتهای هر یالی در گراف که یکی از دو راس حذف شده است را با راس جدید جایگزین می‌کنیم. (مشخص است که با انجام این عملیات ممکن است یال چندگانه یا طوقه داشته باشیم)

الگوریتمی از $O(n)$ بیابید که با ورودی گرفتن گراف نهایی، مشخص کند آیا رسیدن به آن با حرکات ما امکان پذیر است یا خیر؟

الگوریتم شما به ترتیب

- عدد $n$ یعنی تعداد رئوس اولیه،
- عدد $m$ یعنی تعداد رئوس نهایی،
- $m$ مجموعه ی $A_۱, A_۲, \cdots, A_m$ به عنوان برچسب راس‌های گراف نهایی و
- سپس $n$ یال هر کدام در یک خط ورودی که یال $i$ام در ورودی به صورت "$v_i\ u_i$" است. این بدین معنی است که در گراف نهایی یالی از $A_{u_i}$ به $A_{v_i}$ وجود دارد،

در ورودی دریافت می‌کند.

(اگر موفق به حل سوال نشدید در صورتی که در زمان $O(n)$ تشخیص دهید مستقل از یال‌های گراف نهایی داده شده، آیا برچسب‌های داده شده در ورودی می‌تواند برچسب‌های **یک** گراف نهایی باشد یا خیر ۴۵ نمره دریافت می‌کنید)

## مسألهٔ سوم: رنگ‌آمیزی با قطر کم ..... ۱۰۰ امتیاز

گراف بی‌جهت و نه لزوما همبند $G$ با $n$ راس و $m$ یال را در نظر بگیرید.

آ) الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n+m)$ ارائه دهید که حداکثر نیمی از راس‌های $G$ را **حذف کند** به طوریکه قطر هر مولفه‌ی همبندی در گراف باقی‌مانده از مرتبه‌ی $O(\log n)$ شود. برای مثال، اگر $G$ یک دور زوج راسی باشد، یکی از خروجی‌های مجاز الگوریتم حذف راس‌ها به صورت یکی در میان است. (۵۰ نمره)

ب) الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n+m)$ ارائه دهید که به هر کدام از راس‌های $G$ یک رنگ بین ۱ تا $k$ که $k = \lceil \log n \rceil + ۱$ الصاق کند به طوریکه برای هر $i \in \{۱, ۲, \cdots, k\}$، قطر تمام مولفه‌های همبندی $G_i$ از مرتبه‌ی $O(\log n)$ باشد. در اینجا منظور از $G_i$ زیرگراف القایی شامل تمام راس‌ها با رنگ $i$ است. برای حل این قسمت می‌توانید از نتیجه‌ی قسمت اول بدون اثبات استفاده کنید. در صورتی که الگوریتمی از زمان $O((n+m)\cdot \log n)$ ارائه دهید، ۱۰ نمره از این بخش به شما تعلق می‌گیرد. (۵۰ نمره)