

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری اول

سه‌شنبه ۲۴ مرداد ۱۴۰۲

وقت: ۵ ساعت

۱۰۰ امتیاز **اپودرخت دودویی**

درخت دودویی کامل، درختی ریشه‌دار است که هر راس آن یا فرزندی ندارد یا دقیقاً دو فرزند دارد و فاصله‌ی تمام برگ‌ها تا ریشه یکسان است. فاصله‌ی برگ‌ها تا ریشه را ارتفاع درخت تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال درخت تک راسی ارتفاع صفر و درخت دودویی کامل سه راسی که دو راس آن فرزند راس سوم هستند، ارتفاع یک دارد. برای هر درخت دودویی کامل T ، به ازای هر زیرمجموعه‌ی رئوس آن مانند A ، ابردخت A را تعریف می‌کنیم جنگلی که شامل رئوس A باشد و پدر هر راس در ابردخت A ، پایین‌ترین جدش در درخت T است که عضو A باشد. توجه کنید که ابردخت A تنها زمانی درخت است که یک راس در A وجود داشته باشد که تمام رئوس A در درخت T در زیردرخت آن باشند.

یک درخت دودویی کامل T به ارتفاع $p+q$ داریم که رئوس آن با دو رنگ آبی و قرمز رنگ آمیزی شده‌اند. ثابت کنید همواره می‌توان یک مجموعه‌ی رئوس A انتخاب کرد که ابردخت A ، یک درخت دودویی کامل تماماً قرمز به ارتفاع p یا یک درخت دودویی کامل تماماً آبی به ارتفاع q باشد.

۱۰۰ امتیاز **ژوچیت و شمپندگی**

یک گراف ساده را غنی می‌نامیم اگر به ازای هر زیر مجموعه‌ی زوج عضوی از راس‌ها مثل A ، زیرگرافی فراگیر و همبند داشته باشد که در آن درجه‌ی هر راس از A فرد و درجه‌ی هر راس خارج از A زوج باشد. به عنوان مثال یک دور ۴ راسی غنی نیست؛ برای اثبات این موضوع A را مجموعه‌ی تمام راس‌ها در نظر بگیرید. زیرگراف فراگیر و همبندی از دور چهار نداریم که درجه‌ی هر چهار راس فرد باشد.

(آ) $f(n)$ را کوچکترین عدد طبیعی m بگیرید طوری که هر گراف ساده‌ی n راسی و m یالی غنی باشد. $f(1402)$ را بیابید. (۵۰ نمره)

به عنوان مثال $f(4) = 5$.

در صورتی که موفق به حل سوال نشدید شما می‌توانید با به دست آوردن $\theta(f(n))$ یا به دست آوردن مقدار دقیق $f(1402)$ و اثبات یک طرف از درستی عدد (کران بالا یا پایین) ۱۸ نمره از این بخش کسب کنید.

(ب) $g(n)$ را کوچکترین عدد طبیعی بگیرید طوری که گرافی ساده غنی n راسی و m یالی وجود داشته باشد. $g(1402)$ را بیابید. (۵۰ نمره)

دقت کنید که طبیعتاً به ازای هر عدد طبیعی $g(n) \leq f(n)$.

در صورتی که موفق به حل سوال نشدید شما می‌توانید با به دست آوردن $\theta(g(n))$ یا به دست آوردن مقدار دقیق $g(1402)$ و اثبات یک طرف از درستی عدد (کران بالا یا پایین) ۱۸ نمره از این بخش کسب کنید.

دومینوها امتیاز ۱۰۰

۲۸ دومینوی متفاوت داریم که روی هر خانه از هر دومینوی یکی از اعداد صفر تا شش قرار دارد و در واقع همه دوتایی‌های ممکن را ساخته‌ایم. دارا می‌خواهد طوری دومینوها را در جدول ۷ در ۸ بچیند که در هر سطر و هر ستون همه اعداد ظاهر شوند. (دقت کنید که ۷ سطر و ۸ ستون داریم)

(آ) ثابت کنید می‌تواند چنین کاری انجام دهد. (۵۰ نمره)

(ب) فرض کنید سارا جدول را به مستطیل‌های ۱ در ۲ یا ۲ در ۱ افراز کرده است طوری که در هر سطر حداقل

یک مستطیل افقی (۱ در ۲) وجود داشته باشد. آیا دارا همواره می‌تواند دومینوها را در مستطیل‌های

مشخص شده قرار دهد که خاصیت فوق برقرار باشد؟ (۵۰ نمره)