

باسمه تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری نهایی سوم

وقت: ۵ ساعت

یکشنبه ۱۳ شهریور ۱۴۰۱

توضیحات:

• ترتیب سوالات به صورت تصادفی است.

مسئله‌ی یکم. دنباله‌ها ۱۰۰ امتیاز

فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. یک n -تیرتپر مجموعه‌ای از دنباله‌ها تعریف می‌شود که ویژگی‌های زیر را داشته باشند:

- هر یک از اعضای هر یک از دنباله‌ها، یکی از اعداد طبیعی ۱ تا n باشد.
- تمام دنباله‌ها اکیداً صعودی باشند.
- هر جفت از اعداد ۱ تا n حداکثر در یک دنباله، مجاور باشند.
- تعداد دنباله‌ها دقیقاً n است.

بیشینه‌ی مجموع تعداد اعضای دنباله‌ها را در میان تمام n -تیرتپرها، $f(n)$ در نظر بگیرید. ثابت کنید $f(n) \in \theta(n\sqrt{n})$ است.

مسئله‌ی دوم. قطر ماکسیمال ۱۰۰ امتیاز

یک گراف ساده‌ی ۱۴۰۱ رأسی با قطر چهار داریم که ماکسیمال است (یعنی با اضافه کردن هر یال جدید به آن، قطر کاهش می‌یابد). ثابت کنید کمینه‌ی تعداد یال‌های این گراف برابر با $2 - \binom{1401}{2}$ است.

مسئله‌ی سوم. بازی با جدول ۱۰۰ امتیاز

مرتضی و ابوالفضل روی یک جدول ۸×۸ با هم بازی می‌کنند. ابتدا مرتضی روی برخی از خانه‌های جدول، یک مهره قرار می‌دهد. حال نوبت ابوالفضل است و او در تعدادی مرحله، می‌تواند هر بار یکی از دو کار زیر را انجام دهد:

- گذاشتن یک مهره در یک خانه‌ی خالی جدول
 - انتخاب یک زیرجدول که تمام خانه‌های آن مهره‌دار باشند، و سپس حذف تمام مهره‌های آن زیرجدول.
- هدف ابوالفضل، حذف تمامی مهره‌ها در کم‌ترین تعداد مرحله‌ی ممکن است و مرتضی می‌خواهد تعداد مراحل ابوالفضل، بیشینه شود. اگر هر دو نفر به طور بهینه بازی کنند، ابوالفضل چند مرحله انجام خواهد داد؟