

## دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

### آزمون نظری نهایی دوم

وقت: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

پنج‌شنبه ۱۰ شهریور ۱۴۰۱

توضیحات:

- ترتیب سوالات به صورت تصادفی است.

#### مسئله‌ی یکم. جایگشت لات‌ها ..... امتیاز ۱۰۰

فرض کنید  $n$  عددی طبیعی و  $\pi$  جایگشتی از اعداد ۱ تا  $n$  باشد. به یک عدد در  $\pi$  بهراد گوئیم، اگر از تمام اعداد سمت چپش بزرگ‌تر باشد (برای مثال، عدد سمت چپ  $\pi$  قطعاً بهراد است). به یک عدد در  $\pi$  پارسا گوئیم، اگر از تمام اعداد سمت راستش بزرگ‌تر باشد. عدد لاتی یک جایگشت، تعداد بهرادهای آن و عدد زیبایی یک جایگشت، تعداد پارساهای آن است.

(آ) به ازای تمام جایگشت‌های موجود از اعداد ۱ تا  $n$ ، زوج مرتب زیر را در نظر بگیرید:

(عدد زیبایی جایگشت، عدد لاتی جایگشت)

چند زوج مرتب متمایز به دست می‌آید؟ (۳۰ امتیاز)

(ب) الگوریتمی از  $O(n^2)$  ارائه دهید که با گرفتن سه عدد طبیعی  $a, m, n$  و  $b$  باقی‌مانده‌ی تعداد جایگشت‌های

اعداد ۱ تا  $n$  با عدد لاتی  $a$  و عدد زیبایی  $b$  بر  $m$  را بیابد (عدد  $m$  ورودی کم‌تر از  $10^9$  است). (۴۰ امتیاز)

(ج) به زیرمجموعه‌ای از جایگشت‌های اعداد ۱ تا  $n$  سازگار گوئیم، اگر عدد لاتی تمام آن‌ها برابر و هم‌چنین

عدد زیبایی تمام‌شان برابر باشد. نشان دهید تعداد اعضای بزرگ‌ترین زیرمجموعه‌ی سازگار از جایگشت‌های

اعداد ۱ تا  $n$  از  $\Omega((n-2)! \times \log(n))$  است. (۳۰ امتیاز)

#### مسئله‌ی دوم. همبند وابسته به دور ..... امتیاز ۱۰۰

در یک گراف ساده‌ی همبند  $n$  رأسی، حذف یال‌های هر دور، گراف را ناهمبند می‌کند. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

#### مسئله‌ی سوم. علامت‌زنی ..... امتیاز ۱۰۰

می‌خواهیم تعدادی از خانه‌های یک جدول  $2022 \times 2022$  را علامت بزئیم، طوری که در هر زیرجدول (به جز خود جدول)، تعداد خانه‌های علامت خورده، کم‌تر یا مساوی ماکسیمم تعداد سطرها و تعداد ستون‌های زیرجدول باشد.

حداکثر چند خانه را می‌توانیم علامت بزئیم؟