

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری نهایی یکم

وقت: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

چهارشنبه ۹ شهریور ۱۴۰۱

توضیحات:

- ترتیب سوالات به صورت تصادفی است.

مسئله‌ی یکم. پرتاب توپ ۱۰۰ امتیاز

n توپ متمایز با شماره‌های ۱ تا n به ترتیب در اختیار n نفر با شماره‌های ۱ تا n است. در هر مرحله دو نفر می‌توانند توپ‌شان را جابه‌جا کنند. آیا ممکن است پس از تعدادی مرحله، هر نفر هر توپ را دقیقاً یک بار از دیگران دریافت کرده باشد؟ توجه کنید توپ آغازینی که در اختیار افراد است، توپ دریافتی محسوب نمی‌شود و افراد باید همان توپ را نیز در حین بازی یک بار دریافت کنند.

(آ) مسئله را به ازای $n = ۱۴۰۱$ حل کنید. (۵۰ امتیاز)

(ب) مسئله را به ازای $n = ۲۰۲۲$ حل کنید. (۵۰ امتیاز)

مسئله‌ی دوم. همبندترش کن! ۱۰۰ امتیاز

هر یال گراف ساده n -رأسی $G = (V, E)$ وزنی نامنفی دارد. فرض کنید E' مجموعه‌ی یال‌های با وزن صفر در G باشد. می‌دانیم $G' = (V, E')$ یک گراف k -همبند رأسی است، طوری که $k > n - ۴$. اعداد n و k و همچنین گراف G از ورودی داده می‌شوند. الگوریتمی از $O(n^2)$ ارائه کنید که زیرمجموعه‌ی E'' از E با کم‌ترین مجموع وزن را بیابد، طوری که $G'' = (V, E'')$ یک گراف $(k+1)$ -همبند رأسی باشد (هم‌چنین اگر چنین زیرمجموعه‌ای از یال‌ها وجود نداشته باشد، باید الگوریتم شما آن را بفهمد و اعلام کند که چنین زیرمجموعه‌ای وجود ندارد).

مسئله‌ی سوم. مسیر ۳-گریز ۱۰۰ امتیاز

در گراف، به یک مسیر ۳-گریز گوئیم، اگر طول آن بر ۳ بخش پذیر نباشد. کمینه‌ی ممکن تعداد مسیرهای ۳-گریز در یک درخت n -رأسی را $f(n)$ در نظر می‌گیریم. نشان دهید $f(n) \in \theta(n\sqrt{n})$.