

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری سوم

جمعه ۱۹ شهریور ۱۴۰۰

وقت: ۲۷۰ دقیقه

مسئله‌ی یکم. ایلچ خیلی زودتر از پیمان حل کرد امتیاز ۱۰۰

mn شکلات در خانه‌های یک جدول $m \times n$ قرار گرفته‌اند (لزومی ندارد در هر خانه دقیقاً یک شکلات باشد). ممکن است برخی از خانه‌ها بدون شکلات و برخی از خانه‌ها شامل بیش از یک شکلات باشند). در هر مرحله می‌توانیم یکی از چهار کار زیر را انجام دهیم:

- دو سطر را انتخاب کرده و محتوایشان را جابه‌جا کنیم.
- دو ستون را انتخاب کرده و محتوایشان را جابه‌جا کنیم.
- دو خانه را انتخاب کرده و محتوایشان را جابه‌جا کنیم.
- تعدادی شکلات از یک خانه برداشته (نه لزوماً تمام شکلات‌های آن خانه) و به خانه‌ای مجاور منتقل کنیم (دو خانه را مجاور گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند).

می‌خواهیم با تعدادی مرحله به وضعیتی برسیم که هر خانه دقیقاً یک شکلات داشته باشد. کم‌ترین تعداد مرحله‌ی لازم برای رسیدن به این هدف را **فان‌دی‌نامبر** جدول می‌نامیم. بیشینه‌ی فان‌دی‌نامبر در میان تمام جدول‌های اولیه‌ی $m \times n$ چقدر است؟

مسئله‌ی دوم. کرنادو امتیاز ۱۰۰

سلطان با **کوگوشیان** بازی می‌کند. سلطان در ابتدا گرافی ساده و ۱۰۰ رأسی روی تخته می‌کشد و یک رأس به عنوان مبدأ و رأسی دیگر به عنوان مقصد روی آن مشخص می‌کند. کوگوشیان باید مسیری از مبدأ به مقصد در گراف مشخص کند. کوگوشیان باید به تعداد یال‌های غیر برشی این مسیر، به سلطان پول بدهد. اگر هر دو نفر به صورت بهینه بازی کنند، کوگوشیان چقدر پول به سلطان خواهد داد؟

مسئله‌ی سوم. میلادمه خیلی بزرگه امتیاز ۱۰۰

ایلچ به سربازی رفته و در همان روز اول از او خواسته‌اند تا برای مسئله‌ی زیر، الگوریتمی در زمان چندجمله‌ای ارائه کند:

گراف همبند n رأسی و فاقد یال برشی G به همراه زیردرخت فراگیر T از آن، در ورودی داده می‌شود. تضمین می‌شود درجه‌ی هر رأس در T حداکثر ۱۴۰۰ است و همچنین به ازای هر یال e از G ، طول مسیر بین دو رأس انتهایی e در T حداکثر ۲۰۲۱ می‌باشد. هدف، یافتن زیرگرافی فراگیر و فاقد یال برشی از G با تعداد یال‌های کمینه است.

به ایلچ کمک کنید و الگوریتمی چندجمله‌ای برای مسئله‌ی بالا ارائه کنید، وگرنه وقتی از سربازی برگردد، خودتان می‌دانید ...