

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری دوم

چهارشنبه ۱۷ شهریور ۱۴۰۰

وقت: ۲۷۰ دقیقه

مسئله‌ی یکم. مردم که فهمیدن به نظر! امتیاز ۱۰۰

به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی $1 \leq a \leq \frac{n}{4}$ مقدار $f(n, a)$ را بیشینه‌ی تعداد یال‌ها در میان تمام گراف‌های ساده‌ی دوردار n رأسی در نظر بگیرید که در آن‌ها داریم:

$$\frac{\text{طول بلندترین دور}}{\text{طول کوتاه‌ترین دور}} \leq a$$

ثابت کنید $f(n, a) \in \theta(na)$ است.

مسئله‌ی دوم. پیمان $O(n^5)$ داره! امتیاز ۱۰۰

منظور از یک زیرجدول در یک جدول، جدولی است که از خانه‌های واقع در تقاطع تعدادی سطر متوالی و تعدادی ستون متوالی از جدول ساخته می‌شود. در ورودی، جدولی $n \times n$ با اعداد متمایز به شما داده می‌شود. هدف، یافتن عددی در جدول است که در بیش‌ترین تعداد زیرجدول، عدد بیشینه باشد. الگوریتمی از $O(n^3)$ برای این کار ارائه دهید.

نکته: در صورتی که نتوانستید سوال را به صورت کامل حل کنید، می‌توانید با ارائه‌ی الگوریتم از $O(n^{3.99})$ تا ۵۰ امتیاز یا با ارائه‌ی الگوریتم از $O(n^4)$ تا ۱۵ امتیاز بگیرید.

مسئله‌ی سوم. دوستم به بدبختی افتاده! امتیاز ۱۰۰

تخته شکلاتی به صورت یک جدول $2 \times n$ داریم که از $2n$ تکه شکلات واحد متمایز ساخته شده است. این شکلات، بسته‌بندی نشده است و هدف، بسته‌بندی آن است. دو سبد داریم؛ سبد ۱، سبد شکلات‌های بسته‌بندی نشده و سبد ۲، سبد شکلات‌های بسته‌بندی شده است. در ابتدا شکلات $2 \times n$ ما در سبد ۱ قرار دارد. در هر مرحله یکی از شکلات‌های سبد ۱ برداشته می‌شود، سپس یک سطر یا یک ستون آن به طور کامل از شکلات جدا شده و به عنوان یک بسته، در سبد ۲ قرار می‌گیرد. چنانچه از شکلات برداشته شده از سبد ۱ چیزی باقی بماند (یک یا دو تکه)، این تکه‌ها به سبد ۱ برگردانده می‌شوند.

مراحل تا زمانی که تمام شکلات‌ها بسته‌بندی شوند، ادامه می‌یابد. به دو حالت از بسته‌بندی متفاوت گوییم، اگر در انتها دو تکه شکلات واحد وجود داشته باشند که در یک بسته‌بندی، در یک بسته باشند و در بسته‌بندی دیگر، در یک بسته نباشند. تعداد حالت‌های مختلف بسته‌بندی را $f(n)$ می‌نامیم. برای مثال $f(2) = 6$ و $f(3) = 18$ است.

(آ) ثابت کنید $f(n) \in O(3^n)$ است (۴۰ امتیاز).

(ب) ثابت کنید $f(n) \in \Omega(2/5^n)$ است (۶۰ امتیاز).

نکته: در صورتی که نتوانستید قسمت (ب) را به صورت کامل حل کنید، در صورتی که نشان دهید $f(n) \in \Omega(5^{n/4})$ می‌توانید ۴۰ امتیاز دریافت کنید.