

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری یکم

سه‌شنبه ۱۶ شهریور ۱۴۰۰

وقت: ۲۷۰ دقیقه

مسئله‌ی یکم. ابوال بخشید! ۱۰۰ امتیاز

a توپ از هر یک از رنگ‌های ۱ تا b داریم (مجموعاً $a \times b$ توپ). در یک جایگشت از این توپ‌ها، بینش هر رنگ، برابر تعداد بلوک‌هایی است که توپ‌های آن رنگ تشکیل داده‌اند. امید ریاضی مجموع بینش رنگ‌ها در یک جایگشت از این توپ‌ها چیست؟

مسئله‌ی دوم. می‌دونیم همه ماها تو اصل هشتی! ۱۰۰ امتیاز

یک گراف ساده را **نیمایی** گوئیم، اگر 30 رأسی بوده و هم‌چنین دور به طول کم‌تر از شش نداشته باشد. بیشینه‌ی عدد رنگی رأسی در میان تمام گراف‌های ساده‌ی نیمایی را k در نظر بگیرید. شما در این سوال باید دو عدد طبیعی a و b ارائه دهید و اثبات کنید که $a \leq k \leq b$ است.

نحوه‌ی امتیازدهی: در صورتی که $b - a \leq 1$ باشد تا سقف ۱۰۰ امتیاز، در صورتی که $b - a = 2$ باشد تا سقف ۵۰ امتیاز و در صورتی که $b - a = 3$ باشد تا سقف ۲۰ امتیاز خواهید گرفت.

مسئله‌ی سوم. نباید چپ بزنه که هر پلشتی! ۱۰۰ امتیاز

ابوال و جبارزید با هم بازی می‌کنند. ابتدا ابوال یک گراف کامل 2022 رأسی با رأس‌های 71 تا 72.22 در ذهن خود می‌سازد که هر یال آن آبی یا قرمز است. جبارزید باید رنگ تمام یال‌های این گراف را بفهمد. ابتدا جبارزید مجموعه‌ای از یال‌های گراف را به ابوال می‌دهد. او باید به تعداد یال‌های مجموعه، به ابوال پول بدهد. سپس ابوال علاوه بر گفتن رنگ هر یال مجموعه، به ازای هر دور همیلتونی گراف، تعدادی یال‌های قرمز آن دور را می‌گوید. ابوال برای این کار (گفتن تعداد یال‌های قرمز دورهای همیلتونی)، پولی از جبارزید نمی‌گیرد. اگر هر دو نفر به طور بهینه بازی کنند، جبارزید چقدر پول به ابوال خواهد داد؟

نکته: با ارائه‌ی یک کران بالا و یک کران پایین برای پاسخ مسئله که اختلاف آن‌ها حداکثر ۱۰ باشد، تا سقف ۸۰ امتیاز می‌توانید بگیرید. هم‌چنین مقدار پاسخ مسئله به ازای گراف n رأسی (به جای 2022 رأسی) را $f(n)$ بنامید. در صورت ارائه‌ی $\theta(f(n))$ به جای پاسخ مسئله تا سقف ۵۰ امتیاز می‌توانید بگیرید.