



تابستان سی‌امین دوره المپیاد کامپیوتر آزمون نظری سوم

وقت: ۵ ساعت

سه‌شنبه ۸ مهر ۱۳۹۹

مسئله‌ی یکم. خط و نقطه ۱۰۰ امتیاز

ابوالفضل و پیمان رفقای صمیمی هستند، آن‌ها می‌خواهند قدرت تله‌پاتی‌شان^۱ را به رخ آقا کیوان بکشانند. آقا کیوان به ابوالفضل ۱۳۹۹ خط در حالت **قویا عمومی** می‌دهد. ابوالفضل می‌خواهد تعدادی از تقاطع‌های این خطوط را علامت‌گذاری کرده و پس از آن خط‌ها را پاک کند. سپس پیمان با علامت‌ها روبرو می‌شود و باید بتواند ۱۳۹۹ خط را بازیابی کند. (همه علامت‌ها مثل هم هستند)

پیمان از استراتژی ابوالفضل برای علامت‌گذاری اطلاعی ندارد و ابوالفضل باید طوری علامت‌گذاری کند که پیمان بتواند خطوط را بازیابی کند. پیمان تنها می‌داند که آقا کیوان ۱۳۹۹ خط در حالت **قویا عمومی** به ابوالفضل داده است.

ثابت کنید کمینه تعداد تقاطع‌هایی که ابوالفضل باید علامت‌گذاری کند تا پیمان از روی علامت‌ها بتواند تمام خطوط را بازیابی کند ۲۰۹۷ علامت است. دقت کنید که علامت‌گذاری ابوالفضل باید به ازای هر حالت ممکن که آقا کیوان به او ارائه می‌کند برای پیمان کارا باشد.

n خط در حالت **قویا عمومی** اند اگر:

- هیچ دو خطی موازی نباشند.
- هیچ سه خطی هم‌رس نباشند.
- هیچ سه تقاطعی هم خط نباشند مگر اینکه هر سه روی یکی از n خط اولیه باشند.

با اثبات اینکه همواره می‌توانند با ۲۰۹۷ علامت خطوط را بازیابی کنند ۴۰ امتیاز دریافت می‌کنید و با اثبات اینکه آقا کیوان می‌تواند طوری خطوط را ارائه کند که لااقل ۲۰۹۷ علامت لازم باشد، ۶۰ امتیاز دیگر را نیز دریافت خواهید کرد.

اگر ثابت کنید همواره می‌توانند با ۲۰۹۸ علامت خطوط را بازیابی کنند ۳۰ امتیاز می‌گیرید.

مسئله‌ی دوم. فوت کوزه‌گری ۱۰۰ امتیاز

جشن کوزه‌گران در حال برگزاری است و ۱۰۰ کوزه‌گر از کشورهای مختلف در این جشن حضور دارند. هر یک از کوزه‌گرها فوت و فن منحصر به فرد خودش را دارد. **می‌خواهیم همه‌ی کسانی که در جشن شرکت می‌کنند، همه‌ی این ۱۰۰ نوع فن کوزه‌گری را یاد بگیرند.** مشکل این است که کوزه‌گرها زبان‌های مختلفی دارند و حرف همدیگر را متوجه نمی‌شوند. خوشبختانه n مترجم خبره داریم که تمام زبان‌های دنیا را می‌دانند. می‌توانیم تعدادی از آن‌ها را به جشن دعوت کنیم. دعوت از مترجم i ام به مقدار c_i هزینه دارد. ($1 \leq i \leq n$)

هر کسی که در جشن فوت و فنی را بلد است یا یاد می‌گیرد، به تمام دوستانش آن فن را یاد می‌دهد. در ابتدا هیچ دو نفری با هم دوست نیستند و هر دو نفری حرف همدیگر را می‌فهمند مگر اینکه هر دوی آن‌ها کوزه‌گر باشند. (مترجمان حرف همه را می‌فهمند و کوزه‌گران فقط حرف مترجمان را می‌فهمند)

آ. هر کسی در جشن یک هزینه برای دوستی دارد، هزینه دوستی مترجم i ام w_i و هزینه دوستی کوزه‌گر i ام برابر

w_i^k است. در هر مرحله می‌توانیم دو نفر که حرف همدیگر را می‌فهمند انتخاب کنیم و این دو را با هزینه‌ای برابر جمع w های متناظر این دو نفر، با هم دوست کنیم. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ ارائه کنید که به عنوان ورودی n, c_1, c_2, \dots, c_n و مقادیر $w_1^k, w_2^k, \dots, w_n^k$ و $w_1^t, w_2^t, \dots, w_n^t$ را بگیرد و کمترین هزینه را برای اینکه همه افراد حاضر در جشن، تمام ۱۰۰ فوت و فن کوزه‌گری را یاد بگیرند، خروجی دهد. (۳۰ امتیاز)

ب. در هر مرحله می‌توانیم یک نفر حاضر در جشن مانند v و زیرمجموعه‌ای از افراد حاضر در جشن مانند S را انتخاب کنیم، به طوری که $v \notin S$ و v حرف تمام اعضای S را متوجه شود. سپس با هزینه $Cost(v, S)$ تمام اعضای S را با v دوست کنیم. می‌دانیم تابع $Cost(v, S)$ خاصیت‌های زیر را دارد:

- این تابع در زمان $O(|S|)$ قابل محاسبه است.
- ضمناً این تابع همواره نامنفی است.
- اگر $S = \emptyset$ (تهی) باشد، $Cost(v, S) = 0$
- به ازای هر v و هر دو زیرمجموعه S_1, S_2 میدانیم $Cost(v, S_1 \cup S_2) \leq Cost(v, S_1) + Cost(v, S_2)$
- به ازای هر v و $S_1 \subseteq S_2$ میدانیم: $Cost(v, S_1) \leq Cost(v, S_2)$

الگوریتمی با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای بر حسب n ارائه کنید که به عنوان ورودی عدد n و مقادیر c_1, \dots, c_n را بگیرد و کمترین هزینه را برای اینکه همه افراد حاضر در جشن، تمام ۱۰۰ فوت و فن کوزه‌گری را یاد بگیرند، خروجی بدهد. (می‌توانید در الگوریتم خود از تابع $Cost(S, v)$ استفاده کنید، دقت کنید در این قسمت برای ایجاد دوستی میان u و v لازم است هم u را در مجموعه S مربوط به v بیاورید و هم v را در مجموعه S مربوط به u) (۷۰ امتیاز)

مسئله‌ی سوم. دور متوازن ۱۰۰..... امتیاز

گراف ساده G را دور متوازن می‌نامیم اگر اندازه کوچکترین دور آن از نصف اندازه بزرگترین دور آن بزرگتر باشد.

آ. یک گراف $n \geq 5$ راسی دور متوازن که دور به طول ۳ ندارد، حداکثر چند یال دارد؟

(۵۰ امتیاز)

ب. یک گراف n راسی دور متوازن حداکثر چند یال دارد؟ (۵۰ امتیاز)

بیچ تجربه و آزمونی رانمی توان دلیل اعتبار گرفت.

آندره موروا