



تابستان سی امین دوره المپیاد کامپیوتر آزمون نظری اول

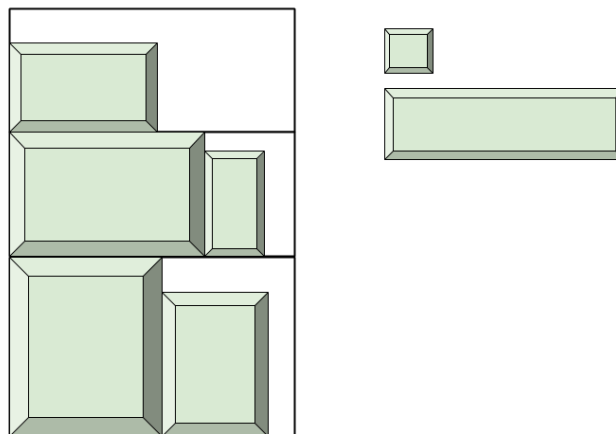
وقت: ۵ ساعت

شنبه ۵ مهر ۱۳۹۹

مسئله‌ی پیکره مستطیل‌ها ۱۰۰ امتیاز

یک قاب عکس به عرض W و ارتفاع H داریم. تعدادی عکس داریم که عرض و ارتفاع هریک از آن‌ها مشخص شده است و هریک به تنهایی در قاب عکس جا می‌شود. واضح است که نمی‌توان عکس‌ها را دوران داد. می‌خواهیم تا جای ممکن این عکس‌ها را در قاب عکس قرار دهیم به طوری که عکس‌ها هم‌پوشانی نداشته باشند. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. عکس‌ها را بر اساس ارتفاع به صورت نزولی مرتب کنید.
 ۲. اولین عکس باقی مانده را در پایین ترین نقطه از ضلع سمت چپ که هیچ عکسی در آن نیست قرار دهید، اگر نمی‌توانید این عکس را قرار دهید به الگوریتم پایان دهید.
 ۳. سپس عکس‌ها را یکی پس از دیگری در سمت راست آخرین عکس گذاشته شده قرار دهید به طوری که نقطه پایین راست عکس قبلی و نقطه پایین چپ عکس کنونی منطبق شوند. این کار را تا زمانی که عکسی باقی مانده است و عکسی از سمت راست قاب عکس خارج نشده است انجام دهید.
 ۴. اگر عکسی باقی مانده است به ۲ بروید.
- نشان دهید اگر w و h به ترتیب بیشینه‌ی عرض و ارتفاع عکس‌ها باشند؛ پس از پایان الگوریتم یا همه‌ی عکس‌ها درون قاب عکس قرار می‌گیرند یا حداقل $(W - w) \times (H - h)$ از مساحت قاب عکس را پوشیده می‌شود.



با توجه به الگوریتم، عکس‌هایی که در شکل بالا وجود دارند مطابق تصویر در قاب عکس قرار می‌گیرند. در مثال بالا دو قطعه عکس در قاب جای نمی‌گیرد.

مسئله‌ی دوم. همه‌دوری ۱۰۰ امتیاز

به یک گراف n راسی همه‌دوری می‌گوییم اگر به ازای هر $2 < i < n+1$ دوری به طول i در این گراف وجود داشته باشد. کمترین مقدار k را برحسب n بیابید طوری که هر گراف n راسی که درجه هر راس آن حداقل k است، همه‌دوری باشد.

مسئله‌ی سوم. k تایی‌های خوب ۱۰۰ امتیاز

دنباله‌ی a_1, a_2, \dots, a_n از اعداد طبیعی مفروض است. به n^k طریق می‌توان یک k تایی مرتب از این اعداد تولید کرد. به ازای هر یک از این k تایی‌های مرتب، جمع آن را در دنباله s قرار می‌دهیم (جمع یک k تایی مرتب برابر با مجموع تمامی اعضای آن می‌باشد).

دنباله s که به صورت نازولی مرتب شده است را $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{n^k}$ در نظر بگیرید. الگوریتمی بیابید که با ورودی گرفتن n ، دنباله‌ی a و عدد m مقدار s_m را مشخص کند (k مقداری ثابت است).

اگر الگوریتم شما از $O(n^{\lceil \frac{k}{4} \rceil} \lg(n) \lg(\max(a_i)))$ باشد ۱۵ امتیاز، اگر از $O(n^{\lceil \frac{k}{4} \rceil} \lg^2(n))$ باشد، ۸۰ امتیاز و اگر از $O(n^{\lceil \frac{k}{4} \rceil} \lg(n))$ باشد ۱۰۰ امتیاز می‌گیرید.

باید ثابت کنید الگوریتم شما درست و از مرتبه مشخص شده است. توجه کنید که حافظه اشغال شده توسط الگوریتم شما از مرتبه پیچیدگی زمانی آن باشد.

اگر تمام شب برای دیدن خورشید کمره کنی، لذت تماشای ستارگان را از دست خواهی داد
تکمیل