

## دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

### آزمون نهایی نظری سوم

چهارشنبه ۱۵ شهریور ۱۳۹۶

وقت: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

توضیحات:

- ترتیب سوالات به صورت تصادفی است.
- امتیاز تمام سوالات برابر است.

#### مسئله‌ی یکم. ابهت ..... ۱۰۰ امتیاز

فرض کنید  $n$  و  $k$  دو عدد طبیعی باشند. به یک دنباله‌ی  $n$  تایی مانند  $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  با ابهت گوئیم، اگر به ازای هر  $1 \leq i \leq n$  داشته باشیم:

$$a_i \in \{1, 2, \dots, k\}$$

دو دنباله‌ی با ابهت مانند  $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  و  $B = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$  را دوست گوئیم، اگر به ازای دست کم یک  $1 \leq i \leq n$  داشته باشیم  $a_i = b_i$ .

فرض کنید  $G$  یک گراف ساده باشد که هر رأس آن متناظر با یک دنباله‌ی با ابهت باشد و دو رأس در آن به هم وصل هستند، اگر دنباله‌های متناظرشان دوست باشند. بزرگ‌ترین خوشه‌ی  $G$  چند رأس (بر حسب  $n$  و  $k$ ) دارد؟

#### مسئله‌ی دوم. مدال‌های IOI ..... ۱۰۰ امتیاز

سلطان یک مسابقه برگزار کرده و می‌خواهد به سه نفر نخست به ترتیب مدال‌های طلا، نقره و برنز بدهد. او در انبار خود ۲۵ مدال پیدا کرد، اما به علت گذر زمان رنگ‌های این مدال‌ها از بین رفته و همگی شبیه به هم شده‌اند. سلطان می‌داند مدال‌هایش وزن‌های متفاوتی دارند. او می‌خواهد سه مدالی که سنگین‌ترین وزن را دارند، پیدا کرده و به ترتیب آن‌ها را طلایی، نقره‌ای و برنزی کند و به دانش‌آموزان برتر برساند. سلطان یک دست‌گاہ دارد و در هر مرحله می‌تواند پنج مدال در دست‌گاہ بگذارد و ترتیب وزن آن‌ها را بفهمد. کمینه‌ی تعداد مراحل لازم برای استفاده از دست‌گاہ را بیابید، طوری که سلطان به طور مطمئن بتواند به هدفش برسد.

#### مسئله‌ی سوم. محاکمه‌ی جاسوسان ..... ۱۰۰ امتیاز

ناتیا هو ۲۳ جاسوس به سرزمین سلطان فرستاد و سلطان تمام آن‌ها را شناسایی و دست‌گیر کرد. سلطان در هر روز محاکمه می‌تواند تمام جاسوسان را به صف کرده و به ترتیب از آن‌ها بپرسد: «آیا دانش‌پژوهان دوره‌ی ۹۶ احق هستند یا خیر؟» که پرسشی بدیهی با پاسخ واضح است! قبل از محاکمه، با بررسی‌های زیاد سلطان متوجه موارد زیر شد:

- هر نفر از جاسوسان یا مبتدی است یا حرفه‌ای.
- هر یک از جاسوسان یک هم‌پیمان در میان جاسوسان دیگر دارد. رابطه‌ی هم‌پیمانی دوطرفه است.
- هم‌پیمان هر جاسوس مبتدی، یک جاسوس حرفه‌ای است و بالعکس.
- در هر روز محاکمه، هر جاسوس به این شکل پاسخ خواهد داد: اگر هم‌پیمان او زودتر در صف بوده و پاسخ

داده باشد، فرد مذکور نیز مانند او پاسخ می‌دهد، در غیر این صورت اگر فرد مذکور مبتدی باشد پاسخ درست و در غیر این صورت پاسخ نادرست خواهد داد.

سلطان می‌خواهد مبتدی یا حرفه‌ای بودن هر یک از جاسوسان را بفهمد.

(آ) ثابت کنید سلطان می‌تواند این کار را با یک محاکمه‌ی  $n+1$  روزه انجام دهد. (۵۰ امتیاز)

(ب) ثابت کنید سلطان نمی‌تواند به طور مطمئن کار خود را در یک محاکمه‌ی  $n$  روزه انجام دهد. (۵۰ امتیاز)

مردم کسی را نکشند «خوشا به حال او»،  
مگر این که روزگار برای او روز بدی را پنهان کرد  
امام علی (ع)