

## دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

### آزمون نهایی نظری یکم

وقت: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

شنبه ۱۱ شهریور ۱۳۹۶

توضیحات:

- ترتیب سوالات به صورت تصادفی است.
- امتیاز تمام سوالات برابر است.

### مسئله‌ی یکم. گراف باریک ..... ۱۰۰ امتیاز

یک گراف ساده را **باریک** گوئیم، اگر دور به طول بیش از چهار نداشته باشد. بیشینه‌ی تعداد یال‌های یک گراف باریک  $n$  رأسی چیست؟

### مسئله‌ی دوم. بزرگ‌راه وکیل آباد و پیش به سوی راستگو! ..... ۱۰۰ امتیاز

فرض کنید  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < d$  و همچنین  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$  اعدادی حقیقی باشند. به ازای هر  $1 \leq i, j \leq n$  یک خودرو در نقطه‌ی  $(x_i, y_j)$  قرار دارد که با سرعت ثابت و مثبت  $v_{i,j}$  در راستای محور  $x$  حرکت می‌کند. قرار است با فرمان سلطان، تمام خودروها به طور هم‌زمان شروع به حرکت کنند. هر خودرو تا زمانی که مانعی نداشته باشد، با سرعت ثابت خود حرکت می‌کند و به محض این که به خودرویی دیگر برسد، مجبور است پشت سر و چسبیده به آن و با سرعتی کندتر حرکت کند. هر خودرو به محض رسیدن به خط  $x = d$  متوقف می‌شود. تضمین می‌شود  $d$  آن‌قدر زیاد است که اگر دو خودرو بتوانند به هم برسند، تا قبل از توقف این کار انجام شود. به ازای هر خودرو، مدت زمان بین صدور فرمان تا توقف را در نظر گرفته و این مقادیر را جمع کنید. به مقدار حاصل، **هزینه‌ی انتظار تا شیشلیک** می‌گوئیم!

سلطان به ایلچ اجازه داده است تا قبل از صدور فرمان، آرایش خودروها را عوض کند. ایلچ در هر مرحله می‌تواند دو خودرو با  $x$  برابر انتخاب کرده و جابه‌جا کند. پس از جابه‌جایی‌های ایلچ، دستور سلطان صادر می‌شود. هدف ایلچ کمینه کردن هزینه‌ی انتظار تا شیشلیک است.

از ورودی مقادیر  $n$ ،  $x_i$  ها،  $y_i$  ها،  $d$  و  $v_{i,j}$  ها داده می‌شود. متأسفانه امروز ایلچ حضور نداشته و کمینه کردن هزینه‌ی انتظار تا شیشلیک به عهده‌ی شماست! الگوریتمی از  $O(n^3)$  ارائه دهید که کمینه‌ی هزینه‌ی انتظار تا شیشلیک را بیابد.

### مسئله‌ی سوم. ایلچ و مملی ..... ۱۰۰ امتیاز

یک جدول  $m \times n$  داریم که برخی از خانه‌های آن سفید و بقیه‌ی آن‌ها سیاه هستند. می‌دانیم به ازای هر دو خانه‌ی سفید، می‌توان از یکی شروع کرده، در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور (دارای ضلع مشترک) رفته و پس از تعدادی مرحله به دیگری رسید. ایلچ و مملی، هر کدام روی یک خانه‌ی سفید از جدول قرار گرفته‌اند. این دو حق ندارند روی خانه‌های سیاه رفته یا از جدول خارج شوند. هر یک از این دو با دریافت یکی از دستورهای چپ، راست، بالا یا پایین، در صورتی که بتوانند، طبق آن دستور یک واحد جابه‌جا می‌شوند، در غیر این صورت سر جای خود می‌مانند.

سلطان می‌خواهد ایلیچ و مملی را به هم برساند. او در هر مرحله می‌تواند یک دستور صادر کرده و هر دو نفر (ایلیچ و مملی) طبق آن عمل کنند. ثابت کنید سلطان می‌تواند با دنباله‌ای از دستورها به هدفش برسد.

ثروت در غربت، وطن  
و تکی دستی در وطن، غربت  
است - امام علی (ع)