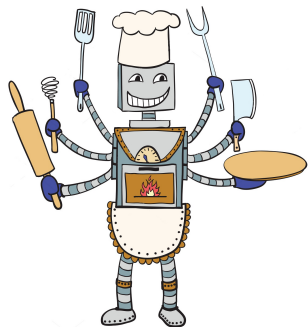


مسئله‌ی یک: روبات رولت بر ۲۰ نمره

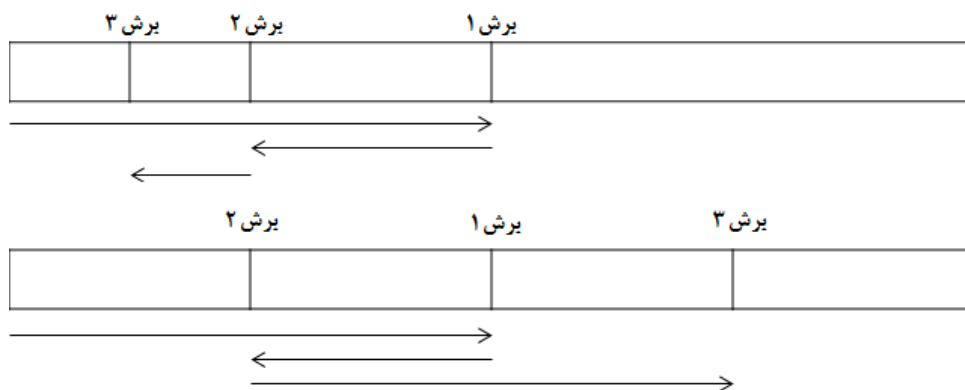


شیرینی‌فروشی «پای‌تک»، یک شیرینی‌فروشی مدرن است که حتی برای برش رولت‌هایش از روبات استفاده می‌کند. یک روبات رولت‌بر، تنها می‌تواند رولت‌هایی که طولشان توانی از ۲ است، برش دهد. یک رولت به طول 2^n را می‌توانید به صورت یک نوار با طول 2^n در نظر بگیرید.

برای شروع برش زدن، رولت بر عدد k را که نشان‌دهنده‌ی تعداد تکه‌هایی است که باید رولت به آن تقسیم شود، به عنوان ورودی دریافت می‌کند. سپس، رولت بر در هر مرحله می‌تواند تیغ‌های برش خود را به وسط یکی از قسمت‌هایی که طولش زوج است ببرد و آنجا را برش دهد. برای انتقال تیغ‌های رولت بر از مکان x به مکان y ،

$|x - y|$ ثانیه زمان لازم است. در ابتدا تیغ‌های رولت بر در چپ‌ترین قسمت رولت (مکان صفر) قرار دارد. هم‌چنین می‌توانیم از زمان برش زدن صرف نظر کنید. واضح است برای این‌که رولت به k قسمت تقسیم شود، $k - 1$ برش نیاز است.

برای نمونه، دو روش تقسیم رولتی به طول 2^3 به چهار قسمت در شکل زیر نشان داده شده‌اند. روش اول $7 = 4 + 2 + 1$ ثانیه و روش دوم $10 = 4 + 2 + 4$ ثانیه طول می‌کشد.



می‌دانیم به ازای هر k ، روبات رولت بر در کمترین زمان ممکن رولت را به k قسمت تقسیم می‌کند. اگر $f(n, k)$ مدت زمانی باشد که رولت بر، رولتی با طول 2^n را به k قسمت تقسیم می‌کند، به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱- الف (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(20, 2^0)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ب (۱۴ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(60, 1234567891011121314)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

مسئله‌ی دو: نقاشی دیواری **نمره ۳۵**

هوشنگ، مدیر زیباسازی شهر است. شهردار او را مسئول نقاشی طولانی‌ترین دیوار شهر کرده است. هوشنگ از n نقاش برای انجام پروژه دعوت کرده است. او که از المپیاد کامپیوتری‌های قدیمی است، دیوار را که w متر طول دارد، به صورت بازه‌ی $[0, w]$ می‌بیند و هم‌چنین تصمیم گرفته است که هر نقاش، در نقاشی یک قسمت پیوسته از دیوار (یک زیربازه از $[0, w]$) کمک کند. به طور دقیق‌تر، نقاش i ام وظیفه‌ی کمک در نقاشی بازه‌ی $[l_i, r_i]$ ($0 \leq l_i < r_i \leq w$) از دیوار را بر عهده دارد. برای مدیریت بهتر، هوشنگ شرایط زیر را در اختصاص دهی بازه به نقاش‌ها اعمال کرده است:

• بازه‌ی هر نقاش، حداکثر با بازه‌ی k نقاش دیگر اشتراک ناتهی دارد.

• به ازای تمامی i و j هایی که $(1 \leq i, j \leq n, i \neq j)$ ، شرایط زیر برقرار هستند:

$$l_i \neq l_j -$$

$$r_i \neq r_j -$$

$$l_i \neq r_j -$$

اگر تعداد روش‌های ممکن از اختصاص دهی بازه به نقاش‌ها که در شرایط بالا صدق می‌کنند، برابر با X باشد، به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱- الف (نمره ۸): اگر $w = 100, n = 10, k = 1$ باشند، باقی‌مانده‌ی X بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ب (نمره ۱۳): اگر $w = 400, n = 50, k = 2$ باشند، باقی‌مانده‌ی X بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ج (نمره ۱۴): اگر $w = 1000, n = 100, k = 3$ باشند، باقی‌مانده‌ی X بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

مسئله‌ی سه: بی‌حاشیه **۴۰ نمره**

بدون هیچ داستان و دلیلی، هوشنگ از شما خواسته است که این سوال را حل کنید. اعداد ۱ تا n به جز آن‌هایی که بر k بخش‌پذیر هستند را از کوچک به بزرگ و از چپ به راست می‌نویسیم. سپس در هر مرحله چپ‌ترین یا راست‌ترین عدد را از دنباله حذف و آن را در تمامی اعضای دنباله‌ی باقی‌مانده ضرب می‌کنیم. این کار را آنقدر انجام می‌دهیم، تا تنها یک عدد باقی بماند. در آخر نیز عددی که مانده را با باقی‌مانده‌اش بر k جایگزین می‌کنیم. با انجام این مراحل، دنباله به یک عدد صحیح نامنفی و کوچکتر از k تبدیل می‌شود. برای نمونه، یکی از روش‌هایی که می‌توانیم به ازای $n = 5, k = 3$ ، دنباله‌ی اولیه را به یک عدد تبدیل کنیم، در زیر آمده است.

$$1, 2, 4, [5] \rightarrow 5, 10, [20] \rightarrow [100], 200 \rightarrow 20000 \rightarrow 2$$

اگر طول دنباله‌ی اولیه l باشد، با توجه به این‌که در هر مرحله باید چپ‌ترین یا راست‌ترین عدد را حذف کنیم، 2^{l-1} روش وجود دارد تا دنباله به یک عدد تبدیل شود. برای هر یک از این روش‌ها عدد نهایی را جمع زده و یا باقی‌مانده‌ی این مجموع بر $10^9 + 7$ را $f(n, k)$ می‌نامیم. لازم به ذکر است که عدد $10^9 + 7$ ، اول است.

۱- الف (۹ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(10^3, 3)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ب (۱۴ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(10^6, 17)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ج (۱۷ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(10^9, 257)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما: