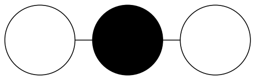
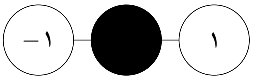
پاسخ‌های مرحله دوم بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر ایران

درخت ساده! .... ۱۷ امتیاز

به استقرای قوی روی n حکم را ثابت می‌کنیم. برای پایه‌ی استقرا $n=۳$ و $n=۴$ را در نظر می‌گیریم. تنها حالت ممکن برای $n=۳$، شکل (۱) است که حسام می‌تواند کارش را مانند شکل (۲) انجام دهد:

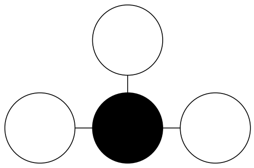


شکل (۱)

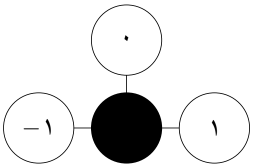


شکل (۲)

تنها حالت ممکن نیز برای $n=۴$ شکل (۳) است که حسام می‌تواند کارش را مانند شکل (۴) انجام دهد:



شکل (۳)



شکل (۴)

فرض کنید حکم به ازای $< n$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم به ازای n نیز برقرار است. یک درخت n رأسی در نظر بگیرید و آن را ریشه‌دار کنید. چند حالت داریم:

- دو برگ سفید با پدر مشترک داشته باشیم؛ در این صورت روی یکی از آن دو برگ عدد ۱ و روی دیگری −۱ می‌نویسیم و عدد بقیه‌ی رأس‌های سفید را ۰ می‌گذاریم. تمام شرایط برقرار و کار حسام انجام می‌شود.
- در صورتی که حالت بالا رخ ندهد، پایین‌ترین برگ را در نظر می‌گیریم و آن را u می‌نامیم. دو حالت داریم:

  – این برگ سیاه باشد. فرض کنید v پدر رأس u باشد. v را به همراه تمام فرزندانش (از جمله u) از درخت حذف می‌کنیم. در درخت باقی‌مانده هم‌چنان تعداد رأس‌های سفید بیش‌تر است. هم‌چنین در درخت باقی‌مانده حداقل سه رأس وجود دارد؛ زیرا پدر v رأسی سیاه است و بنابراین دست کم دو رأس سفید باید در درخت باقی‌مانده موجود باشند. پس درخت باقی‌مانده یک درخت معتبر است و می‌توانیم طبق فرض استقرا آن را به طور معتبر عددگذاری کنیم. حال عدد v را صفر می‌گذاریم. تمام شرایط برقرار و کار حسام انجام می‌شود.

  – این برگ سفید باشد. در این صورت فرض کنید پدر u یک رأس سیاه مانند v باشد. v فرزند دیگری ندارد. u,v را از درخت حذف می‌کنیم. یک درخت $n-۲$ رأسی معتبر به دست می‌آید و طبق فرض استقرا می‌توان

آن را به صورت معتبر عددگذاری کرد. حال فرض کنید عدد پدر رأس v (که رأسی سفید است)، برابر x باشد. عدد رأس u را برابر $-x$ می‌گذاریم. تمام شرایط برقرار و کار حسام انجام می‌شود.

دست‌کش‌های مشکوک! .... **۲۲ امتیاز**

ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $n+۱$ است.

ابتدا ثابت می‌کنیم پیام روشی تضمینی با کم‌تر از $n+۱$ پرسش ندارد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید پیام با $m \le n$ پرسش به هدف خود رسیده است. اگر پاسخ حسام برای پرسش آخر برابر با پاسخ درست پرسش نخست شده باشد، در این صورت اگر $m = ۱$ باشد، مقدار k می‌تواند هر یک از اعداد $۱, ۲$ و اگر $m \neq ۱$ باشد، مقدار k می‌تواند هر یک از اعداد m یا $m - ۱$ (و حتّی اعدادی دیگر) باشد. پس پیام نمی‌تواند به طور یکتا k را تشخیص دهد که تناقض است و حکم اثبات می‌شود. ■

حال ثابت می‌کنیم پیام می‌تواند با حداکثر $n+۱$ پرسش به هدف خود برسد. پیام در پرسش نخست خود رنگ دست‌کش دست راست حمید و در بقیه‌ی پرسش‌ها رنگ دست‌کش دست چپ او را می‌پرسد. ادّعا می‌کنیم پس از این $n+۱$ پرسش k به طور یکتا تعیین می‌شود. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید این طور نباشد؛ یعنی دست کم دو عدد مثل p,q وجود دارند که مقدار k می‌تواند برابر با آن‌ها باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $p > q$ باشد. از آن‌جایی که q نامزدی برای k است، پس پاسخ پرسش $q+۱$ باید آبی و پاسخ پرسش‌های $q+۲, q+۳, \ldots, n+۱$ باید قرمز باشد؛ بنابراین پاسخ پرسش $p+۱$ نیز قرمز است؛ زیرا $p+۱ \ge q+۲$. از طرفی p نیز نامزدی برای k است؛ پس پاسخ پرسش $p+۱$ باید آبی باشد. این یک تناقض است و حکم ثابت می‌شود. ■

پارکینگ‌های مشکوک! .... **۲۵ امتیاز**

ابتدا به استقرای ضعیف روی n ثابت می‌کنیم اگر n به صورت ۲^q باشد، در n روز نخست هر یک از کارمندها در هر یک از جای‌گاه‌ها دقیقن یک بار پارک می‌کنند. برای پایه‌ی استقرا $n = ۱$ را در نظر می‌گیریم که حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $n = ۲^k$ درست باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای $n = ۲^{k+۱}$ نیز درست است.

فرض کنید شرکت دارای n کارمند باشد که $n = ۲^{k+۱}$ است. به کارمندهای $۱, ۲, \ldots, ۲^k$ کارمندهای **قدیمی** و به دیگران، کارمندهای **جدید** می‌گوییم. به همین ترتیب جای‌گاه‌های قدیمی و جدید را تعریف می‌کنیم. در ۲^k روز نخست، به ازای هر کارمند قدیمی در هنگام پارک کردن، دست کم یک جای‌گاه قدیمی وجود دارد که تاکنون در آن پارک نکرده است؛ پس در ۲^k روز نخست کارمندهای قدیمی در جای‌گاه‌های قدیمی پارک می‌کنند و در نتیجه کارمندهای جدید باید در جای‌گاه‌های جدید پارک کنند. بنابراین طبق فرض استقرا در ۲^k روز نخست هر کارمند قدیمی دقیقن یک بار در هر یک از جای‌گاه‌های قدیمی و هر کارمند جدید دقیقن یک بار در هر یک از جای‌گاه‌های جدید قرار می‌گیرد. در ۲^k روز دیگر، به ازای هر کارمند قدیمی در هنگام پارک کردن، دست کم یک جای‌گاه جدید وجود دارد که تاکنون در آن پارک

نکرده است و از طرفی قبلن در هر یک از جای‌گاه‌های قدیمی دقیقن یک بار پارک کرده است؛ پس در 2^k روز دوم کارمندهای قدیمی در جای‌گاه‌های جدید و کارمندهای جدید در جای‌گاه‌های قدیمی پارک می‌کنند. بنابراین طبق فرض استقرا در 2^k روز دوم هر کارمند قدیمی در هر جای‌گاه جدید دقیقن یک بار و هر کارمند جدید در هر جای‌گاه قدیمی دقیقن یک بار پارک می‌کند. به این ترتیب در n روز نخست هر یک از کارمندان در هر یک از جای‌گاه‌ها دقیقن یک بار پارک می‌کنند و حکم استقرا ثابت می‌شود. ■

حال حکم اصلی مسئله را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم n به صورت $2^q + 1$ باشد. کارمند شماره n را **نخودی** و بقیه‌ی کارمندها را **عادی** می‌نامیم. به استقرای قوی روی k که $1 \leq k \leq n$ ثابت می‌کنیم در روزهای

$$(n-1)(k-1)+1, (n-1)(k-1)+2, \ldots, (n-1)k$$

کارمند نخودی در جای‌گاه $n-k+1$ پارک می‌کند و هر یک از کارمندهای عادی در هر یک از جای‌گاه‌ها به جز جای‌گاه $n-k+1$ دقیقن یک بار پارک می‌کنند.

برای پایه‌ی استقرا $k = 1$ را در نظر بگیرید. در روزهای $1, 2, \ldots, n-1$ به ازای هر یک از کارمندهای عادی دست کم یکی از جای‌گاه‌های $1, 2, \ldots, n-1$ وجود دارد که تاکنون در آن پارک نکرده است. بنابراین در $n-1$ روز نخست کارمند نخودی در جای‌گاه n وکارمندهای عادی در جای‌گاه‌های $1, 2, \ldots, n-1$ پارک می‌کنند. با توجه به حکم اثبات شده در ابتدای نوشته هر یک از کارمندهای $1, 2, \ldots, n-1$ دقیقن یک بار در هر یک از جای‌گاه‌های $1, 2, \ldots, n-1$ پارک می‌کنند و پایه‌ی استقرا ثابت می‌شود.

حال فرض کنید حکم برای $k >$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای k نیز برقرار است. روزهای

$$(n-1)(k-1)+1, (n-1)(k-1)+2, \ldots, (n-1)k$$

را روزهای **طلایی** می‌نامیم. تا قبل از شروع روزهای طلایی طبق فرض استقرا هر یک از کارمندهای عادی دقیقن $k-1$ بار در هر یک از جای‌گاه‌های $1, 2, \ldots, n-k$ و دقیقن $k-2$ بار در هر یک از جای‌گاه‌های $n-k+2, n-k+3, \ldots, n$ پارک کرده‌اند. در هر یک از روزهای طلایی، به ازای هر یک از کارمندهای عادی در هنگام پارک کردن، جای‌گاهی به جز جای‌گاه $n-k+1$ وجود دارد که در هیچ روز طلایی در آن پارک نکرده است و چنین جای‌گاهی در هنگام پارک کردن به جای‌گاه $n-k+1$ اولویت دارد؛ پس در روزهای طلایی کارمند نخودی در جای‌گاه $n-k+1$ و کارمندهای عادی در جای‌گاه‌های دیگر پارک می‌کنند.

حال شرکتی مشابه با $n-1$ جای‌گاه با شماره‌های $1, 2, \ldots, n-1$ در نظر بگیرید که در شروع روزهای طلایی شرکت ما، تأسیس می‌شود. ادّعا می‌کنیم برای کارمندان شرکت ما، اولویت جای‌گاه‌های

$$n-k+2, n-k+3, \ldots, n, 1, 2, \ldots, n-k$$

به ترتیب برابر اولویت جای‌گاه‌های

$$۱, ۲, \ldots, n - ۱$$

برای کارمندان شرکت تازه تأسیس است. دو جای‌گاه با شماره‌های i, j در شرکت ما در نظر بگیرید. سه حالت داریم:

- $۱ \leq i < j \leq n-k$ باشد. در این صورت اگر تاکنون در جای‌گاه i بیش‌تر پارک کرده باشیم، اولویت با جای‌گاه j و در غیر این صورت اولویت با جای‌گاه i است. در شرکت تازه تأسیس نیز اولویت‌های جای‌گاه‌های متناظر $(k - ۱ + i, k - ۱ + j)$ به همین صورت است.

- $n - k + ۲ \leq i < j \leq n$ باشد. در این صورت اگر تاکنون در جای‌گاه i بیش‌تر پارک کرده باشیم، اولویت با جای‌گاه j و در غیر این صورت اولویت با جای‌گاه i است. در شرکت تازه تأسیس نیز اولویت‌های جای‌گاه‌های متناظر $\big(i - (n-k+۱), j - (n-k+۱)\big)$ به همین صورت است.

- $۱ \leq i \leq n-k < j \leq n$ باشد. در این صورت اگر تاکنون در جای‌گاه i بیش‌تر پارک کرده باشیم اولویت با جای‌گاه j در غیر این صورت اولویت با جای‌گاه i است. در شرکت تازه تأسیس نیز اولویت جای‌گاه‌های متناظر $\big(k - ۱ + i, j - (n+k-۱)\big)$ به همین صورت است.

به این ترتیب ادّعای ما ثابت می‌شود و کارمندان ما در روزهای طلایی به مانند کارمندهای شرکت تازه‌تأسیس در جای‌گاه‌های متناظر پارک می‌کنند که طبق حکم ثابت شده در ابتدای نوشته هر کارمند در هر یک از جای‌گاه‌ها به جز جای‌گاه $n - k + ۱$ دقیقن یک بار پارک می‌کند و حکم استقرا ثابت می‌شود. ■

با توجه به روند اثبات‌شده‌ی بالا در n دور نخست ـ که هر دور شامل $n - ۱$ روز است ـ روز منظّمی به جز روز نخست رخ نمی‌دهد؛ امّا پس از این n دوره هر کس در هر جای‌گاه دقیقن $n - ۱$ بار پارک کرده است و روز بعدی روزی منظّم خواهد بود و حکم ثابت می‌شود.

بازی قهرمانی! .... **۳۶ امتیاز**

ثابت می‌کنیم پاسخ برای n فرد $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ و برای n زوج $\frac{n}{۲} + ۱$ است.

درجه‌ی قرمز یک رأس را تعداد یال‌های قرمز متصل به آن تعریف می‌کنیم. به همین ترتیب درجه‌ی آبی یک رأس تعریف می‌شود.

ابتدا روشی برای رنگ‌آمیزی علی‌رضا ارائه می‌دهیم که تضمین کند حداقل به مقدار گفته شده یال آبی خواهیم داشت. برای n فرد علی‌رضا یک رأس را در نظر نمی‌گیرد و بقیه‌ی رأس‌ها را به جفت‌ها افراز می‌کند. او یال بین دو رأس هر جفت را آبی و بقیه‌ی یال‌ها را قرمز می‌گذارد. در ابتدا درجه‌ی آبی هر رأس فرد است و طی اعمال تعویض، زوجیت درجه‌ی آبی رأس‌ها تغییری نمی‌کند؛ پس فرهاد هر طوری که بازی کند، در انتها درجه‌ی آبی تمام رأس‌ها فرد خواهد بود و دست کم

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ یال آبی خواهیم داشت.

برای n زوج علی‌رضا یال رأس شماره‌ی ۱ به رئوس $2,3,4$ را آبی می‌گذارد. او هم‌چنین بقیه‌ی رأس‌ها را به جفت‌هایی افراز کرده و یال بین دو رأس هر جفت را آبی می‌کند و در انتها بقیه‌ی یال‌ها را قرمز می‌گذارد. طی اعمال تعویض، علاوه بر زوجیت درجه‌ی آبی رئوس، زوجیت تعداد یال‌های آبی نیز ثابت می‌ماند. بنابراین فرهاد هر طوری بازی کند در انتها درجه‌ی تمام رئوس فرد خواهد بود و امکان ندارد درجه‌ی تمام رئوس برابر ۱ شود؛ زیرا در این صورت زوجیت تعداد یال‌های آبی تغییر کرده است که تناقض است. پس در انتها دست کم $\frac{n}{2} + 1$ یال آبی خواهیم داشت. ■

اکنون ثابت می‌کنیم به ازای هر دور به طول زوج مانند C، فرهاد می‌تواند تعدادی عمل تعویض انجام دهد؛ طوری که رنگ یال‌های C تغییر کند؛ امّا رنگ هیچ یال دیگری تغییر نکند. حکم را به استقرای ضعیف روی k (طول دور C) ثابت می‌کنیم.

برای پایه‌ی استقرا $k = 4$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $C = v_1v_2v_3v_4v_1$ باشد. مسیری گذرنده از تمام رئوس دیگر مانند P در نظر بگیرید. فرهاد می‌تواند یک بار با عمل تعویض روی دور $v_4Pv_1v_3v_2v_4$ و بار دیگر عمل تعویض روی دور $v_4Pv_1v_2v_3v_4$ کاری کند که رنگ یال‌های C تغییر کند؛ امّا رنگ هیچ یال دیگری تغییر نکند. به این ترتیب پایه‌ی استقرا ثابت می‌شود.

حال فرض کنید حکم برای k برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای $k+2$ نیز برقرار است. دور $C = v_1v_2\ldots v_{k+2}$ را در نظر بگیرید. فرهاد می‌تواند رنگ یال‌های دور $v_1v_2v_3v_4v_1$ را مستقل از بقیه‌ی یال‌ها طبق پایه‌ی استقرا تغییر دهد. هم‌چنین او طبق فرض استقرا می‌تواند رنگ یال‌های دور $v_3v_4v_5\ldots v_{k+2}v_3$ را مستقل از بقیه‌ی یال‌ها تغییر دهد. با این دو تغییر، رنگ یال‌های دور C مستقل از بقیه‌ی یال‌ها تغییر می‌کند و حکم استقرا ثابت می‌شود. ■

حال فرض کنید n فرد باشد. ثابت می‌کنیم فرهاد می‌تواند رنگ یال‌های یک دور به طول ۳ را مستقل از بقیه‌ی یال‌ها تغییر دهد. فرض کنید $C = v_1v_2v_3v_1$ یک دور به طول ۳ باشد و P مسیری گذرنده از بقیه‌ی رئوس باشد. فرهاد می‌تواند یک بار با تغییر رنگ دور همیلتونی $v_1Pv_2v_3v_1$ و سپس با تغییر دور به طول زوج $v_1Pv_2v_1$ به هدف خود برسد. ■

حال ثابت می‌کنیم فرهاد می‌تواند به ازای هر رنگ‌آمیزی اولیه طوری بازی کند که تعداد یال‌های آبی حداکثر به میزان گفته شده باشد.

اگر n فرد باشد، فرهاد می‌تواند در هر لحظه یک رأس v با درجه‌ی آبی بیش‌تر از ۱ در نظر بگیرد. v شامل دست کم دو هم‌سایه مانند a,b است که با یال آبی به v وصل هستند. فرهاد با تغییر رنگ دور به طول ۳ شامل رئوس v,a,b می‌تواند تعداد یال‌های آبی را کم کند. این روند پایان‌پذیر است و بالأخره به وضعیتی می‌رسیم که درجه‌ی آبی هر رأس حداکثر ۱ است و در چنین شرایطی حداکثر $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ یال آبی خواهیم داشت.

اگر n زوج باشد، فرهاد در هر یک از چهار حالت زیر، می‌تواند تعداد یال‌های آبی را کم کند:

- مسیری آبی به طول دست کم سه داشته باشیم. در این صورت فرهاد با تغییر رنگ یال‌های دوری به طول ۴ شامل این مسیر، تعداد یال‌های آبی را کم می‌کند.

- رأسی مانند v با درجه‌ی آبی بیش‌تر از ۳ داشته باشیم. v شامل دست کم چهار هم‌سایه مانند a, b, c, d است که با یال آبی به v وصل هستند. ابتدا فرهاد رنگ یال‌های دور $vbcav$ را تغییر می‌دهد. اگر تعداد یال‌های آبی کم شود که به هدف خود رسیده‌ایم؛ در غیر این صورت تعداد یال‌های آبی تغییری نکرده است و یال‌های مسیر سه یالی $bavd$ آبی می‌شود که طبق حالت قبل می‌توان تعداد یال‌های آبی را کم کرد.

- دوری آبی به طول ۳ مانند $abca$ داشته باشیم. در این صورت اگر یال آبی دیگری نداشتیم، تعداد یال‌های آبی از مقدار گفته شود بیش‌تر نیست و حکم مسئله اثبات شده است؛ در غیر این صورت یک یال آبی دیگر مانند uv در نظر بگیرید. اگر uv رأس مشترک با دور داشته باشد، حالت یکم پیش می‌آید و می‌توان تعداد یال‌های آبی را کم کرد. در غیر این صورت ابتدا رنگ یال‌های دور $abuva$ را تغییر می‌دهیم. اگر تعداد یال‌های آبی کم شود که به هدف خود رسیده‌ایم؛ در غیر این صورت تعداد یال‌های آبی ثابت می‌ماند و مسیری آبی به طول سه ایجاد می‌شود ($vacb$) که طبق حالت یکم می‌توان تعداد یال‌های آبی را کم کرد.

- دو رأس u, v با درجه‌ی آبی بیش‌تر از ۱ داشته باشیم. اگر u, v به هم یال آبی داشته باشند، یکی از حالات یکم یا سوم پیش می‌آید که به هدف خود می‌رسیم؛ در غیر این صورت u و v هر کدام دست کم دو هم‌سایه مانند u_a, u_b و v_a, v_b دارند که با یال آبی به آن‌ها وصل هستند. فرهاد می‌تواند با تغییر رنگ یال‌های دور به طول زوج $uu_av_avv_bu_bu$ تعداد یال‌های آبی را کم کند.

فرهاد تا زمانی که دست کم یکی از سه حالت بالا در گراف وجود دارد، تعداد یال‌های آبی را کم می‌کند. با توجه به پایان‌پذیر بودن این فرآیند، بالأخره به وضعیتی می‌رسیم که سه حالت بالا در گراف وجود نداشته باشند. در این وضعیت درجه‌ی آبی حداکثر یک رأس می‌تواند بیش‌تر از ۱ باشد (که خود آن نیز حداکثر ۳ است). در این صورت تعداد یال‌های آبی حداکثر $\frac{n}{۲} + ۱$ خواهد شد و حکم اثبات می‌شود. ■