

باسمه تعالی
هجدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر
آزمون پایانی درس روش‌های احتمالاتی

دوشنبه ۱۱ شهریور ۱۳۸۷

زادی‌مقدم وقت: ۳ ساعت و نیم

مسئله‌ی اول: تغییرات ۲۰ نمره
امید ریاضی تعداد بارهایی که نیاز است یک سکه را پرتاب کنیم تا n بار عوض شود (حاصل پرتاب با پرتاب قبلی فرق کند) چند است؟

مسئله‌ی دوم: تاس و الگوریتم ۲۵ نمره
یک تاس را n بار می‌اندازیم یک الگوریتم چندجمله‌ای ارائه کنید که احتمال این را حساب کند که تاس سه بار متوالی یک مقدار نیاورد.

مسئله‌ی سوم: چندیال ۲۵ نمره
یک گراف n راسی تقریباً همبند است اگر به ازای هر افزایش رئوس G به دو دسته‌ی S و T که $|T| \geq |S| \geq n/10$ حداقل یک یال بین این دو دسته وجود داشته باشد. کمترین مقدار k را در نظر بگیرید که اگر یک گراف n -راسی با رئوس $1, 2, \dots, n$ و k یال در نظر بگیرید (تعداد این یال‌ها $C(n, k)$ می‌باشد)، به احتمال حداقل $1/2$ این گراف تقریباً همبند باشد. پیچیدگی تابعی $k(\theta)$ را به دست آورید.

مسئله‌ی چهارم: رسیدن به مقصد ۳۰ نمره
گراف جهت‌دار G با رئوس $1, 2, \dots, n$ به این صورت ساخته شده است که به ازای هر دو راس $i < j$ از i به j یال داریم. از راس یک شروع می‌کنیم. در هر حرکت یکی از یال‌های خروجی را به شکل تصادفی انتخاب می‌کنیم و آن را طی می‌کنیم. پیچیدگی تابعی (θ) تعداد حرکاتی که لازم است انجام دهیم تا به احتمال حداقل $1/2$ به n برسیم چند است.