باسمه تعالی

هفدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر

امتحان پایانی درس نظریه بازی‌ها

پنج‌شنبه ۸ شهریورماه ۱۳۸۶

مهینی، زادی‌مقدم — وقت: ۳ ساعت

مسئله‌ی اوّل: انتخاب عدد با رتبه‌ی بالا ..... ۲۵ نمره

n عدد متفاوت را به یک ترتیب کاملاً تصادفی در روزهای ۱ تا n به ما نشان می‌دهند.(در هر روز دقیقاً یک عدد نشان داده می‌شود) رتبه‌ی این اعداد به این صورت تعریف می‌شود که اگر همه‌ی این n عدد را به صورت مرتب از بزرگ به کوچک در نظر بگیریم، اولین عدد که همان بزرگترین عدد است، رتبه‌اش یک است، عدد بعدی رتبه‌اش دو است و به همین صورت عدد nام که همان کوچکترین عدد است رتبه‌اش n است. ما در کل می‌توانیم یکی از این اعداد را انتخاب کنیم. هر عدد را هم فقط در روز خودش(نه دیرتر و نه زودتر) می‌توان انتخاب کرد. هدف این است که عددی را انتخاب کنیم که رتبه‌اش حداکثر k(یک عدد داده‌شده) باشد. ما در ابتدای کار صرفاً می‌دانیم که n و k چند است و اینکه اعدادی که قرار است در n روز آینده نشان داده شوند متفاوت خواهند بود. روش زیر را برای این هدف انتخاب کرده‌ایم: هر عدد جدیدی که نشان داده می‌شود می‌بینیم که اگر این عدد از لااقل $n-k$ عدد از اعدادی که تاکنون آمده‌اند، بزرگتر باشد و اگر تاکنون عددی را انتخاب نکرده‌ایم، همین عدد جدید را انتخاب می‌کنیم. بدیهی است که اگر این روش عددی را انتخاب کند این عدد خاصیت موردنظر ما را دارد. شما ثابت کنید احتمال اینکه این روش عددی را انتخاب کند حداقل $\frac{k}{n}$ و حداکثر $\frac{1}{n-k+1}+\frac{2}{n-k+2}+\frac{3}{n-k+3}+\ldots\frac{k}{n}$ می‌باشد.

مسئله‌ی دوم: هزینه‌ی آشوب و هزینه‌ی پایداری ..... ۲۵ نمره

یک گراف وزن‌دار در نظر بگیرید که وزن هر یال نشان دهنده‌ی هزینه‌ی ساخت آن یال در گراف می‌باشد. یک بازی به این صورت بر روی آن تعریف می‌کنیم : بازیکن iام ($1 \le i \le k$ که k تعداد بازیکن‌هاست) یک جفت راس مانند s_i و t_i دارد و هدفش این است که یک مسیر در گراف بین این دو راس ساخته شود. پس مجموعه استراتژی‌های نفر iام مجموعه تمام مسیرهای بین s_i و t_i می‌باشد. بعد از آنکه تمام افراد مسیر خود را انتخاب کردند هر فرد هزینه تمام یال‌های مسیر خود را می‌پردازد با این توضیح که اگر $l \ge 1$ نفر در مسیرهای خود از یک یال استفاده کرده بودند، هر کدام $1/l$ هزینه آن یال را می‌پردازند. هدف آن است که مجموع پولی که تمام افراد می‌پردازند کمینه شود. جواب بهینه جوابی است که کمترین هزینه را دارد. حال همه‌ی نقاط تعادلی این بازی را در نظر بگیرید.(دقت کنید که ممکن است جواب بهینه در بین نقاط تعادلی نباشد) بدترین نقطه‌ی تعادلی، نقطه‌ی تعادلی با بیشترین هزینه است و بهترین نقطه‌ی تعادلی، نقطه‌ی تعادلی با کمترین هزینه است.

۱) مثالی بزنید که در آن نسبت هزینه‌ی بدترین نقطه‌ی تعادلی به هزینه‌ی جواب بهینه حداقل ۱۰ باشد.

۲) مثالی بزنید که در آن نسبت هزینه‌ی بهترین نقطه‌ی تعادلی به هزینه‌ی جواب بهینه حداقل $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}$ باشد.

مسئله‌ی سوم: گراف‌سازی و منافعش ..... ۲۵ نمره

فرض کنید که n نفر در یک بازی شرکت کرده‌اند. هر نفر می‌تواند یک یال بین خود و هر شخص دیگری بسازد و باید به ازای هر یالی که می‌سازد a تومان هزینه کند. از طرفی شخص iام از این گراف به اندازه‌ی $\Sigma_{j=1}^{n} b^{Dist(i,j)}$ تومان پول دریافت می‌کند که در این عبارت b یک عدد بین صفر و یک است(b نیز مانند a در ابتدای کار به همه افراد اعلام شده است) و $Dist(i,j)$ فاصله‌ی افراد به شماره‌های i و j در این گراف است. در ضمن می‌دانیم که $b - b^2 < a < b - b^3$ ثابت کنید هر گرافی که مثلث نداشته باشد و فاصله‌ی هر دو نفر(رأس) در آن حداکثر ۲ باشد یک نقطه‌ی تعادلی برای این بازی است.

مسئله‌ی چهارم: گراف‌سازی و مضرّاتش ..... ۲۵ نمره

فرض کنید که n نفر در یک بازی شرکت کرده‌اند. هر نفر می‌تواند یک یال بین خود و هر شخص دیگری بسازد و باید به ازای هر یالی که می‌سازد α تومان هزینه کند. از طرفی شخص iام از این گراف به اندازه‌ی $Max_{j=1}^{n} Dist(i,j)$ تومان علاوه بر هزینه‌ی یال‌هایی که ساخته، باید هزینه کند که در این عبارت $Dist(i,j)$ فاصله‌ی افراد به شماره‌های i و j در این گراف است. یعنی هزینه‌ی هر نفر برابر است با a برابر تعداد یال‌هایی که ساخته است بعلاوه‌ی فاصله‌اش تا دورترین شخص از آن فرد در گراف. در ضمن می‌دانیم که $1 < \alpha < n$. نقطه‌ی تعادلی(گرافی که نقطه‌ی تعادلی باشد) پیدا کنید که هزینه‌اش $\Omega(\sqrt{\alpha})$(مثلاً $\frac{\sqrt{\alpha}}{10}$) برابر هزینه‌ی جواب بهینه باشد.

موفّق باشید!