

باسمه تعالی

شانزدهمین دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر

امتحان پایان‌ترم درس الگوریتم

پنج‌شنبه ۹ شهریورماه ۱۳۸۵

نصیری شرق، زادی‌مقدم

فرصت: ۵ ساعت

پس از ماه‌ها تلاش و کوشش، دانش‌پژوهان المپیاد کامپیوتر و آقای «کاف» به گردش رفته‌اند. متأسفانه، به دلیل نامساعد بودن شرایط جوی، هواپیمای حامل آن‌ها در یکی از جنگل‌های مخوف سقوط کرد؛ ولی خوش‌بختانه همه‌شان زنده ماندند! به آن‌ها کمک کنید تا با عبور از موانع و مشکلات، به سلامت به باشگاه برگردند...

توجه: در تمامی سؤالات، محدودیت حافظه برابر محدودیت زمان اجرا است.

مسئله‌ی یکم: یک دانش‌پژوه ترسو در تونل مردافکن ۱۵ نمره

پس از پیاده شدن از هواپیمای متلاشی‌شده و گذر از جنگل سرد و تاریک، آن‌ها مجبور شده‌اند از یک تونل تنگ و ترس‌ناک، به نام تونل «مردافکن» بگذرند. برای همین منظور، آقای «کاف» در جلوی همه وارد تونل شد و پشت سر او n دانش‌پژوه در ادامه‌ی صف قرار گرفتند.

می‌دانیم فاصله‌ی هر دانش‌پژوه با نفر جلویی‌اش، پارامتر وابسته‌ای به میزان شجاعت اوست؛ از این‌رو، فاصله‌ی هر دانش‌پژوه با نفر جلویی‌اش را «بی‌باکی» وی می‌نامیم. یک دانش‌پژوه را «ترسو» می‌گوییم، اگر بی‌باکی‌اش، از میانگین بی‌باکی سایر دانش‌پژوهان بیش‌تر نباشد!

با فرض دانستن محل استقرار افراد^۱، الگوریتمی از زمان اجرای متوسط $O(n)$ ارائه دهید که یک دانش‌پژوه ترسو را شناسایی کند. الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

مسئله‌ی دوم: دوگانگی مسیرها به روستای شیرافکن ۱۵ نمره

پس از گذار از تونل مردافکن، دانش‌پژوهان با مشقت فراوان به روستای «پلنگ‌افکن» رسیدند. با پرس‌وجوی فراوان، آقای «کاف» دریافت که برای خلاص شدن از جنگل، آن‌ها باید همگی به روستای «شیرافکن» رفته و از آن‌جا با هواپیما به باشگاه دانش‌پژوهان جوان برگردند.

در همین حین، ی.ا.د.ا.ک^۲ که با تلاش زیاد نقشه‌ی تمامی روستاهای آن سرزمین و جاده‌های بین‌شان را پیدا کرده بود، فهمید که کلاً آن سرزمین m روستا دارد که با e تا جاده به هم وصل هستند و هر کدام از جاده‌های بین روستاها یا «روبا‌افکن» هستند یا «خرس‌افکن». عبور از هر یک از جاده‌های «روبا‌افکن» به دلیل وجود روباه‌های چابک در آن، بایستی به سرعت انجام شود و دقیقاً یک روز طول می‌کشد. اما عبور از جاده‌های «خرس‌افکن» به دلیل وجود خرس‌های خوابیده در آن، بایستی به آرامی انجام شود و دقیقاً $m - 1$ روز طول می‌کشد. نیز، می‌دانیم حداقل یک مسیر از روستای «پلنگ‌افکن» به «شیرافکن» وجود دارد.

با فرض دانستن نقشه‌ی دقیق روستاها، جاده‌ها و نوع آن‌ها، الگوریتمی از زمان اجرای $O(e)$ ارائه دهید که دانش‌پژوهان بتوانند در کم‌ترین تعداد روز از روستای «پلنگ‌افکن» به روستای «شیرافکن» بروند. الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

^۱ فاصله‌ی هر کس از آقای کاف که عدد بسیار بزرگی است
^۲ یکی از دانش‌پژوهان المپیاد کامپیوتر

مسئله سوم: سه قلوهای مصنوعی در زندان سیب زمینی و تربچه افکن ۲۰ نمره

با تلاش و استقامت فراوان، دانش پژوهان و آقای کاف به روستای «شیرافکن» رسیدند. در ورودی روستا، تابلوی بزرگی نصب شده بود که روی آن به خط شیرافکنی نوشته شده بود «ورود سیب زمینی و تربچه ممنوع!». آقای کاف و دانش پژوهان پس از خنده‌ی زیاد، موضوع را جدی نگرفتند و وارد روستا شدند. اما هنوز راه زیادی نرفته بودند که کلانتر روستا، آن‌ها را دستگیر کرد و با توهین بسیار به زندان «سیب زمینی و تربچه افکن»^۳ انداخت!

پس از چند روز، دانش پژوهان و آقای کاف در راه رفتن به دادگاه روستای شیرافکن بودند که ناگهان ی.ا.د.ا.ک (که مدتی بود سعی می‌کرد مطلب مهمی را به‌خاطر بیاورد) فریاد کشید: «یافتم... یافتم...!». ی.ا.د.ا.ک به دانش پژوهان و آقای کاف گفت که طبق مطالعات قبلی‌اش، می‌داند که قاضی روستای «شیرافکن» علاقه‌ی خاصی به سه قلوها دارد و معتقد است که مجازات کردن سه قلوها و همراهان‌شان بدیمن است! سپس اضافه کرد که از نظر قاضی روستای «شیرافکن» سه نفر سه قلو هستند، اگر و فقط اگر با کفش‌های پای راست آن‌ها، بتوان یک مثلث قائم‌الزاویه ساخت!

می‌دانیم سبایز کفش‌های دانش پژوهان با هم متفاوت بوده و هر کدام یک عدد طبیعی کوچک‌تر از n^2 است. اکنون با دانستن سبایز کفش‌های هر یک از n دانش پژوه، الگوریتمی از زمان اجرای $O(n^2)$ ارائه دهید که معلوم کند آیا بین دانش پژوهان، سه قلو وجود دارد یا نه؟ الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

مسئله چهارم: چهار تایی‌های نحس شام مرغ افکن ۲۵ نمره

خوش بختانه، آقای کاف در کوله‌پشتی‌اش، سه جفت کفش ورزشی، مهمونی و پوتین داشت که سبایزهایشان سه و چهار و پنج بود و ...! خلاصه آن‌ها از آن مخمضه جان سالم به‌درد بردند و قاضی هم که فکر می‌کرد آن کفش‌ها متعلق به سه تا سه قلو است، آن‌ها را بخشید و حتی برای دل‌جویی از دانش پژوهان، روز دستگیری آن‌ها را «روز مرگ بر سیب زمینی و تربچه» نامید!

با این وصف، قاضی چون حس می‌کرد ی.ا.د.ا.ک هنوز از موضوع زندان دل‌خور است، ترتیب ضیافت شام «مرغ افکن»^۴ را به افتخار آن‌ها داد. ی.ا.د.ا.ک با فهمیدن موضوع، ابتدا مانند سایرین خیلی خوش حال شد، اما ناگهان فریاد کشید: «اوه... نه!»

ی.ا.د.ا.ک به سایرین گفت که خانه‌ی قاضی k تا میز چهارنفره دارد و او همیشه دوست دارد مهمان‌هایش دور این میزها بنشینند. قاضی معتقد است اگر افراد A, B, C و D پشت یک میز بنشینند و سبایز پاهای آن‌ها $P_A < P_B < P_C < P_D$ باشد، آن میز دقیقاً به میزان مجذور تفاضل شماره‌ی پای دو نفری که شماره‌ی پای‌شان در آن میز نه بیش‌ترین است و نه کم‌ترین یعنی دقیقاً $(P_B - P_C)^2$ واحد، بدیمن می‌شود. از سوی دیگر، اگر قاضی ببیند که مجموع بدیمنی تمام میزها، از یک حدّ خاص بیش‌تر شده است؛ فرمان قتل همه را صادر می‌کند!

می‌دانیم $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ است و سبایز هر پای هریک از افراد حداکثر n^3 است. و دقیقاً $4k$ نفر باید به مهمانی قاضی بروند. با این وصف، الگوریتمی از زمان اجرای $O(nk)$ ارائه دهید که با داشتن مقدار k و سبایز پای هر یک از n دانش پژوه، $4k$ نفری که قرار است به مهمانی بروند و نیز نحوه‌ی نشستن‌شان دور میزها را طوری مشخص که مجموع بدیمنی تمامی میزها کمینه شده و نتیجتاً شانس نجات دانش پژوهان بیشینه شود. الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

^۳ س.و.ت.ا.

^۴ که در آن به هر یک از مهمانان یک مرغ شکم‌پر شیرافکنی داده می‌شود.

مسئله پنجم و آخر: آخرین لطیفه گویی شنونده افکن ۲۵ نمره

خوش بختانه موقع شام، ی.ا.د.ا.ک و دوستانش به قدری برای قاضی جُک گفتند که قاضی یادش رفت میزان بدیمنی میزها را حساب کند و فقط از خنده روی زمین می غلطید!

فردای آن روز به اصرار آقای کاف، تصمیم گرفته شد که دانش پژوهان به باشگاه برگردند اما به دلیل لذتی که قاضی در مهمانی «مرغ افکن» از جُک های دانش پژوهان برده بود، از آن ها خواست که قبل از رفتن از «شیرافکن» همه ی دانش پژوهان همه ی جک هایی که بلد هستند را یک به یک برای او تعریف کنند!

ی.ا.د.ا.ک این بار واقعاً نگران شد. از طرفی او می دانست که اگر کسی جُکی بداند ولی به قاضی نگوید، ممکن است بعداً گندش در بیاید و قاضی این بار واقعاً فرمان قتل همه را صادر کند! از سوی دیگر، ی.ا.د.ا.ک می دانست که جُک گفتن بعضی از دانش پژوهان واقعاً بی مزه است و ممکن است باعث شود قاضی از کوره در برود!

ی.ا.د.ا.ک با یک پرس و جوی ساده فهمید که دانش پژوه i ام، z_i تا جُک بلد است و مجموع میزان بامزگی جُک های او نیز w_i است. هم چنین ی.ا.د.ا.ک به خاطر آورد که اگر قاضی در انتهای شنیدن تمام جُک های یک نفر احساس کند که میانگین بامزگی جُک هایی که تا آن لحظه شنیده از یک مقدار خاصی کم تر است، فکر می کند که دانش پژوهان قصد کم کاری دارند و در نتیجه فرمان قتل همه را صادر می کند!

با این وصف، الگوریتمی از زمان اجرای $O(n \lg n)$ ارائه دهید که با داشتن z_i و w_i ها، ترتیبی برای جُک گفتن دانش پژوهان ارائه دهد که شانس زنده ماندن دانش پژوهان بیشینه شود. به بیان دقیق تر، اگر افراد طبق آن ترتیب جُک بگویند، حداقل میانگین بامزگی جک های گفته شده تا پایان جُک گفتن هر یک از افراد باید بیشینه شود. الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

بی دریا،
کشتی، بی معناست
مرگ کشتی ها اما در دریاست!

بدون باورها،
انسان، بی معناست
مرگ آدمی اما
در انجماد باورهاست!