به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مدت آزمون: ۳/۵ ساعت

سوال ۱ .... ۱۰ امتیاز

$n \geq ۴$ نفر را در نظر بگیرید که هر کدام از آنها در ابتدا یک خبر جدید را می‌داند. (خبرها دوبدو متمایز هستند.) در هر مرحله دو نفر از این افراد به هم تلفن می‌زنند و تمام اخباری را که دارند با هم مبادله می‌کنند. ثابت کنید این افراد می‌توانند با $۲n - ۴$ بار تلفن زدن، همگی از همه‌ی اخبار مطلع شوند.

سوال ۲ .... ۱۰ امتیاز

عددهای ۱، ۲، ۳، ...، و n به ترتیب دلخواهی بر روی یک ردیف قرار گرفته‌اند($n > ۱$). می‌خواهیم با استفاده از عمل زیر این اعداد را به ترتیب صعودی از چپ به راست مرتب کنیم:

در هر مرحله می‌توانیم i رقم سمت چپ را برعکس کنیم($۱ < i \leq n$). به عنوان مثال در ۶ مرحله می‌توانیم ترتیب $۴, ۱, ۳, ۵, ۶, ۲$ را مرتب کنیم:

$$
\begin{array}{rlcl}
 & \underline{۴, ۱}, ۳, ۵, ۶, ۲ & \qquad & i = ۲ \\
\to & \underline{۱, ۴, ۳, ۵, ۶, ۲} & & i = ۶ \\
\to & \underline{۲, ۶, ۵, ۳, ۴}, ۱ & & i = ۵ \\
\to & \underline{۴, ۳}, ۵, ۶, ۲, ۱ & & i = ۲ \\
\to & \underline{۳, ۴, ۵, ۶}, ۲, ۱ & & i = ۴ \\
\to & \underline{۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱} & & i = ۶ \\
\to & ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ & &
\end{array}
$$

۱) ثابت کنید هر ترتیبی از اعداد ۱ تا n را می‌توان با این اعمال در حداکثر ۳ − $۲n$ مرحله مرتب کرد.

۲) ثابت کنید که برای هر ۵ ≤ n، ترتیبی وجود دارد که نمی‌توان آن را در کمتر از n مرحله با این اعمال مرتب کرد.

سوال ۳ .... ۱۰ امتیاز

عددهای طبیعی را به صورت زیر در یک مثلث می‌نویسیم:

						…
					۲۶	…
				۱۷	۲۷	…
			۱۰	۱۸	۲۸	…
		۵	۱۱	۱۹	۲۹	…
	۲	۶	۱۲	۲۰	۳۰	…
۱	۳	۷	۱۳	۲۱	۳۱	…
	۴	۸	۱۴	۲۲	۳۲	…
		۹	۱۵	۲۳	۳۳	…
			۱۶	۲۴	۳۴	…
				۲۵	۳۵	…
					۳۶	…
						…

۱) رابطه‌ای برای محاسبه‌ی عدد اول هر سطر پیدا کنید و آن را اثبات نمایید.

۲) ثابت کنید که حاصلضرب هر دو عدد مجاور در هر سطر، در همان سطر می‌افتد. برای مثال حاصلضرب عددهای ۳ و ۷، عدد ۲۱ است که در همان سطر واقع شده است.

سوال ۴ .... ۱۰ امتیاز

چهار عدد صحیح مثبت را در یک ردیف می‌نویسیم. از روی این ترتیب، یک ترتیب دیگر با این عمل می‌سازیم: ابتدا تفاضل عددهای اول و دوم، سپس تفاضل عددهای دوم و سوم، سپس تفاضل عددهای سوم و چهارم، و در نهایت تفاضل عددهای اول و چهارم را می‌نویسیم. (منظور از تفاضل دو عدد a و b، عدد $|a-b|$ است.) برای مثال از ترتیب $(۵, ۴, ۸, ۲۷)$، ترتیب $(۱, ۴, ۱۹, ۲۲)$ ساخته می‌شود.

۱) ثابت کنید که اگر این عمل را چند بار انجام دهیم، بالاخره پس از مدتی به ترتیب $(۰, ۰, ۰, ۰)$ می‌رسیم.

برای مثال برای ترتیب $(۵, ۴, ۸, ۲۷)$ پس از ۶ مرحله به $(۰, ۰, ۰, ۰)$ می‌رسیم:

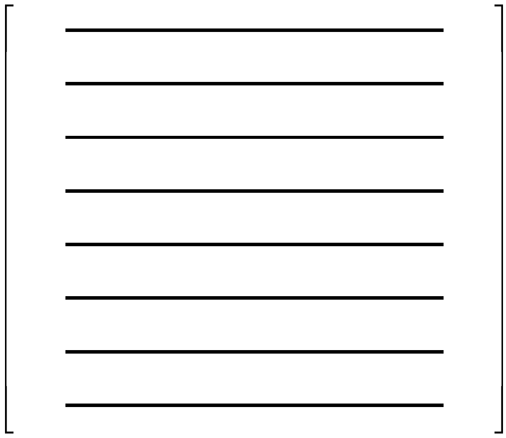
$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & (& ۵ & , & ۴ & , & ۸ & , & ۲۷ &) \\
\rightarrow & (& ۱ & , & ۴ & , & ۱۹ & , & ۲۲ &) \\
\rightarrow & (& ۳ & , & ۱۵ & , & ۳ & , & ۲۱ &) \\
\rightarrow & (& ۱۲ & , & ۱۲ & , & ۱۸ & , & ۱۸ &) \\
\rightarrow & (& ۰ & , & ۶ & , & ۰ & , & ۶ &) \\
\rightarrow & (& ۶ & , & ۶ & , & ۶ & , & ۶ &) \\
\rightarrow & (& ۰ & , & ۰ & , & ۰ & , & ۰ &)
\end{array}
$$

۲) ثابت کنید که اگر به جای ۴ عدد ۳ عدد داشته باشیم، گزاره‌ی قسمت اول ممکن است درست نباشد.

سوال ۵ .... ۱۰ امتیاز

یک ماتریس ۸×۸ با اعداد ۰ و ۱ پر شده است. می‌خواهیم سطرهای این ماتریس را از بالا به پایین به صورت مارپیچ مرتب کنیم. یعنی ترتیب عناصر ماتریس پس از

مرتب شدن به صورت زیر در آید:



الگوریتم زیر را برای این کار پیشنهاد می‌کنیم:

۱) مراحل زیر را ۴ بار تکرار کن:

۱—۱) سطرهای با شماره‌ی فرد را به صورت صعودی و سطرهای با شماره‌ی زوج را به صورت نزولی از چپ به راست مرتب کن.

۱—۲) کلیه‌ی ستون‌ها را به صورت صعودی از بالا به پایین مرتب کن.

برای مثال در شکل زیر چند مرحله از اجرای الگوریتم بر روی یک ماتریس نشان داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

و با ادامه‌ی اجرای الگوریتم، ماتریس به همین صورت مرتب شده باقی می‌ماند.
اثبات کنید که این الگوریتم همواره درست عمل می‌کند.

موفق باشید.