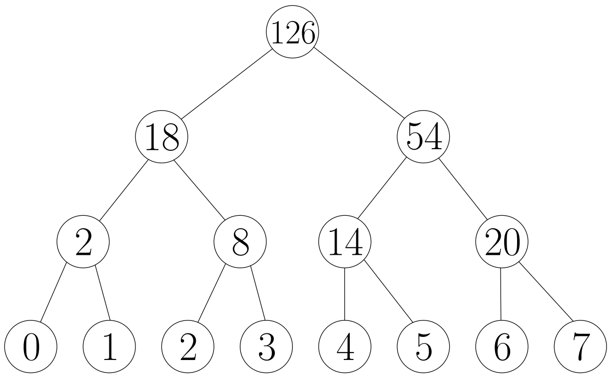
شما **دانش‌پژوه** و Δ شما در **آزمون اصلی چهارشنبه** برابر با **۲۲۹۹۳۹** است!

مسئله‌ی یک: یکی از این دو تا از اون! .... ۳۲ نمره

دینگو یک درخت دودویی کامل با ارتفاع n و ۲^n برگ دارد. او روی برگ‌های این درخت از سمت چپ به راست به ترتیب اعداد ۰ تا $۲^n - ۱$ را می‌نویسد. دینگو روی بقیه‌ی راس‌ها نیز به این صورت عدد می‌نویسد: عدد یک راس غیر برگ برابر است با عدد فرزند سمت چپ آن بعلاوه‌ی دو برابر عدد فرزند سمت راست آن. نمونه‌ای از نحوه‌ی ساخت این درخت را به ازای $n = ۳$ در شکل زیر مشاهده می‌کنید. عدد روی ریشه را A می‌نامیم.



شکل ۱: نمونه‌ی درخت دودویی به ازای $n = ۳$ و اعداد روی راس‌ها

۱- الف (۸ نمره) : اگر $n = ۱۰$ باشد، باقیمانده‌ی $A^۳$ بر Δ چند است؟ پاسخ شما: ....

۱- ب (۷ نمره) : اگر $n = ۱۰^۳$ باشد، باقیمانده‌ی $A^۳$ بر Δ چند است؟ پاسخ شما: ....

۱- ج (۷ نمره) : اگر $n = ۱۰^۶$ باشد، باقیمانده‌ی $A^۳$ بر Δ چند است؟ پاسخ شما: ....

۱- د (۱۰ نمره) : اگر دینگو بتواند ترتیب اعداد نوشته شده روی برگ‌ها را عوض کند، به ازای $n = ۲۰۱۵$ باقیمانده‌ی بزرگترین مقدار ممکن برای A بر Δ چند است؟ پاسخ شما: ....

مسئله‌ی دو: جدول باکتری! .... ۳۱ نمره

جینگو از یک مغازه‌ی باکتری فروشی، یک جدول $n \times n$ تهیه کرده است. دو خانه‌ی این جدول را مجاور می‌گوییم اگر در یک ضلع مشترک باشند. در ابتدا در هر یک از خانه‌های چهار گوشه‌ی جدول یک باکتری وجود دارد و سایر خانه‌ها خالی هستند.

می‌دانیم اگر در ابتدای یک روز در خانه‌ای از جدول حداقل یک باکتری وجود داشته باشد، در ظهر آن روز به هر یک از چهار خانه‌ی مجاور آن (در صورت وجود) یک باکتری اضافه خواهد شد.

(آ) صبح روز اول

1			1
1			1

(ب) صبح روز دوم

1	1	1	1
1			1
1			1
1	1	1	1

(ج) صبح روز سوم

3	3	3	3
3	2	2	3
3	2	2	3
3	3	3	3

شکل ۲: نحوه‌ی رشد باکتری‌ها در یک جدول ۴×۴ - تعداد باکتری‌ها در هر خانه نوشته شده است.

فرض کنید سطرها به ترتیب از بالا به پایین با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, n$ و ستون‌ها از چپ به راست با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, n$ شماره‌گذاری شده‌اند. خانه‌ی (i, j) (خانه‌ی سطر iام و ستون jام جدول) دارای یک توان باکتریایی است که با $f(i, j)$ مشخص می‌شود. اگر تعداد باکتری‌های خانه‌ی (i, j) از $f(i, j)$ بیشتر یا مساوی شود این خانه اشباع شده و همه‌ی باکتری‌های آن می‌میرند و دیگر هیچگاه باکتری‌ای در این خانه از جدول رشد نمی‌کند. اشباع شدن خانه‌ها در عصر یک روز اتفاق می‌افتد. دقت کنید پس از اشباع شدن یک خانه و صفر شدن تعداد باکتری‌ها در آن، این خانه دیگر تاثیری در رشد باکتری‌ها در خانه‌های مجاور آن ندارد.

فرض کنید تکثیر باکتری‌ها از ظهر روز اول شروع شود. $t_{i,j}$ را اولین روزی که خانه‌ی (i, j) اشباع می‌شود تعریف می‌کنیم (در صورتیکه خانه‌ی (i, j) هیچگاه اشباع نشود $t_{i,j} = ۰$ است) و قرار می‌دهیم $A = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} t_{i,j}$.

۲-**الف** (۹ **نمره**) : اگر $n = ۸$ و $f(i, j) = ۱۰ + (۷^i * ۳^j \mod ۴۱)$ باشد، باقی‌مانده‌ی $A^۳$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما: ....

۲-**ب** (۹ **نمره**) : اگر $n = ۴۰$ و $f(i, j) = ۱۰^۴ + (۷^i * ۳^j \mod ۹۹۹۹۱)$ باشد، باقی‌مانده‌ی $A^۳$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما: ....

۲-**ج** (۱۳ **نمره**) : اگر $n = ۱۰۰$ و $f(i, j) = ۱۰^۸ + (۷^i * ۳^j \mod (۱۰^۹ + ۷))$ باشد، باقی‌مانده‌ی $A^۳$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما: ....

مسئله‌ی سه: معلم مینگو! .... ۳۷ نمره

مینگو یک مجموعه به نام S از اعداد طبیعی ۱ تا n دارد. به ازای هر $A \subseteq S$، $F(A)$ را اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$F(A) = \{x = \frac{b}{a} \mid a, b \in A, x \in \mathbb{N}, x > ۱\}$$

که $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌باشد.
اگر $Y_۱, Y_۲, \ldots, Y_{۲^n}$ همه‌ی ۲^n زیرمجموعه‌ی S باشند، معلم مینگو از او خواسته تا مقدار زیر را محاسبه کند:

$$X = \sum_{i=۱}^{۲^n} |F(Y_i)|$$

نکته: $|F(Y_i)|$ نشان‌دهنده‌ی تعداد اعضای مجموعه‌ی $F(Y_i)$ می‌باشد.

۲- الف (۱۰ نمره) : باقی‌مانده‌ی X بر Δ به ازای $n = ۲۰$ چند است؟ پاسخ شما: ....

۲- ب (۱۲ نمره) : باقی‌مانده‌ی X بر Δ به ازای $n = ۱۰۰۰$ چند است؟ پاسخ شما: ....

۲- ج (۱۵ نمره) : باقی‌مانده‌ی X بر Δ به ازای $n = ۱۰^۶$ چند است؟ پاسخ شما: ....

«پیروز و سربلند باشی دانش‌پژوه جان!»